

УДК 517.98

 $M_n(\square)$ MATRICAL ALGEBRASINDA LOKAL AVTOMORFIZM

Kalandarov T.S., Usenova K.Sh.

Qaraqalpaq mámleketlik universiteti

Operator algebralarının avtomorfizmlerin úyreniw funkcional analiz hám algebra teoryasının klassikalıq bagdarlarınan biri bolıp tabıladı ([1]-[7]). Sońǵı on jıllıqlarda onıń lokal ózgeshelikleri ayrıqsha qızıǵıwshılıq oyatıp kelmekte. R.Kadison [4] fon Neyman algebralarının lokal differenciallawları túsiniǵın kirgizip, hár bir noqatta qanday da bir differenciallawǵa sáykes keliwshi sızılıq sáwleleniwdiń differenciallaw bolatuǵınlıǵın dálilledi. Bul nátiyjeni operatorlar algebrası ushın Larson menen Sourour [5, 187-194.] bir birinen ǵárezsiz dálilledi. [5] jumista Banach algebralarında lokal avtomorfizm túsiniǵın kirgizildi. Breshar hám Shemrl [6] sheksiz ólshemli separabelli Hilbert keńisligindegi operatorlar algebrası ushın hár qanday lokal avtomorfizmnıń avtomorfizm bolatuǵınlıǵın kórsetti.

Óz-ózinen tómendegi soraw tuwıladı, joqarıdaǵı tastıyıqlaw shekli ólshemli algebralar, atap aytqanda $M_n(\square)$ ushın da orınlı ma? Bul maqalada $M_n(\square)$, $n \geq 2$ - kompleks sanlar maydanı ústindegi barlıq $n \times n$ ólshemli matricalar algebrasında anıqlanǵan $\varphi(A) = A^T$ sáwlelendiriwi qarastırıladı hámde onıń lokal avtomorfizm bolıp, avtomorfizm bolmaytuǵınlıǵı dálillenedi.

Аңыqlama 1. A kompleks algebra bolsın. Sızılıq biyektiv $\varphi: A \rightarrow A$ sáwlelendiriwi ushın qálegen $A, B \in A$ elementlerde $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ tengligi bajarılsa, teńligi orınlansa, onda $\varphi: A \rightarrow A$ sáwlelendiriwi A algebranıń avtomorfizmi dep ataladı.

Аңыqlama 2. Sızılıq sáwlelendiriw $\varphi: A \rightarrow A$ lokal avtomorfizm delinedi, eger qálegen $A \in A$ element ushın sonday φ^A avtomorfizm bar bolıp, $\varphi(A) = \varphi^A(A)$ teńlik orınlı bolsa. Hár qanday avtomorfizm lokal avtomorfizm boladı. Ulıwma jaǵdayda kerı tastıyıqlaw orınlı emes, tómende qaralıp atırǵan transpoziciya sáwlelendiriwi lokallıq avtomorfizm bolıp, avtomorfizm bolmaytuǵın sáwlelendiriwge mısál boladı.

Lemma 1. $M_n(\square)$ algebrasınıń qálegen φ avtomorfizmi ishki avtomorfizm boladı, yagniy sonday $S \in GL_n(\square)$ kerileniwshi matrica bar bolıp $X \in M_n(\square)$ ushın $\varphi(X) = SXS^{-1}$ boladı.

Bul tastıyıqlaw Skolem-Noether teoremasınıń dara jaǵdayı bolıp tabıladı ([2]).

Lemma 2. Qálegen $A \in M_n(\square)$ ushın A matrica óziniń transpoziciyası A^T ǵa uqsas boladı, yaǵnıy A ǵa baylanıslı bolǵan sonday $S_A \in GL_n(\square)$ kerileniwshi matrica bar bolıp, $S_A A S_A^{-1} = A^T$ boladı.

Дәлillew. $\square$ algebralıq tuyıq bolǵanı sebepli A ushın Jordan normal forması bar boladı: $A = PJP^{-1}$, bul jerde $J = \text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_m}(\lambda_m))$ - Jordan yacheykalarınan turatuǵın blok-diagonal matrica, $P \in GL_n(\square)$.

Hár bir k -ólshemli $J_k(\lambda)$ Jordan blogi ushın R_k menen "teris" (antidiagonalıq) túrlendiriw matricasın belgileymiz: R_k nıń (i, j) -ornındaǵı elementi $i + j = k + 1$ bolǵanda 1 ge, kerı jaǵdayda 0 ge teń. Mına $R_k^2 = I$ teńligi orınlanadı, demek $R_k^{-1} = R_k$ hám $R_k J_k(\lambda) R_k = J_k(\lambda)^T$ boladı. $R := \text{diag}(R_{k_1}, \dots, R_{k_m})$ deb belgilesek, $R^2 = I$ hám $RJR^{-1} = J^T$ boladı.

Mına $A^T = (PJP^{-1})^T = (P^{-1})^T J^T P^T = (P^{-1})^T RJR^{-1} P^T = [(P^{-1})^T R P^{-1}] \cdot A \cdot [P R^{-1} P^T]$ teńlik orınlı. $S_A := (P^{-1})^T R P^{-1}$ deb belgilesek, onda $S_A^{-1} = P R P^T$ boladı (sebebi $R^{-1} = R$ hám $S_A \cdot (P R P^T) = (P^{-1})^T R R P^T = (P^{-1})^T P^T = I$). Demek S_A kerileniwshi bolıp, joqarıdaǵı teńlikten $S_A A S_A^{-1} = A^T$ kelip shıǵadı. Lemma dálillendi.

Теорема 1. Aytayıq $A \in M_n(\square)$, $n \geq 2$ bolsın. Onda $\varphi(A) = A^T$, $A \in M_n(\square)$ sáwlelendiriwi lokal avtomorfizm bolıp avtomorfizm bolmaydı.

Дәлillew. Dáslep sáwlelendiriwdiń avtomorfizm bolmaytuǵınlıǵın dálilleymiz. φ sızılıq hám biektiv ekenligi ayqın, sebebi $(A^T)^T = A$ yagniy $\varphi \circ \varphi = \text{id}$. Biraq, φ multiplikativ emes. Haqıyqatında da, $E_{12}, E_{21} \in M_n(\square)$ matrica birliklerin alayıq. Álbette, $E_{12} E_{21} = E_{11}$, $E_{21} E_{12} = E_{22}$.

Basqa tárepten, $\varphi(E_{12})\varphi(E_{21}) = (E_{12})^T (E_{21})^T = E_{21} E_{12} = E_{22}$, $\varphi(E_{12} E_{21}) = \varphi(E_{11}) = (E_{11})^T = E_{11}$. $E_{11} \neq E_{22}$ bolǵanlıqtan $\varphi(E_{12} E_{21}) \neq \varphi(E_{12})\varphi(E_{21})$, demek φ multiplikativ emes, sonlıqtan avtomorfizm bola almaydı. Endi φ sáwlelendiriwdiń lokal avtomorfizm ekenligin dálilleymiz.

Qálegen $A \in M_n(\square)$ elementin alayıq. Lemma 2 boyınsha sonday $S_A \in GL_n(\square)$ bar bolıp $S_A A S_A^{-1} = A^T$ boladı.

$\varphi^A(X) := S_A X S_A^{-1}$, $X \in M_n(\square)$ dep belgileymiz. Demek, hár bir $A \in M_n(\square)$ ushın $\varphi(A) = \varphi^A(A)$ teńlikti qanaatlandıırıwshı φ^A avtomorfizm tabıladı. Bul φ sáwlelendiriwdiń lokal avtomorfizm ekenligin bildiredi. Teorema dálillendi.

АДЕБИЯТЛАР

1. L. Molnár. Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1895. Springer, Berlin, 2007.

2. N. Jacobson. Basic Algebra II. 2nd ed., Dover Publications, 2009.
3. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц. "Наука", Москва, 1988.
4. R. V. Kadison. Local derivations. J. Algebra, 130 (1990), 494-509.
5. D. R. Larson, A. R. Sourour. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. Proc. Sympos. Pure Math., 51 (1990), Part 2.
6. M. Brešar, P. Šemrl. On local automorphisms and mappings that preserve idempotents. Studia Math., 113 (1995), 101-108.
7. P. Šemrl. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 2677-2680.

Rezyume. $M_n(\square), n \geq 2$ matritsalar algebrasında $\varphi(A) = A^{\text{tr}}$ sáwlelendiriwiniń lokal avtomorfizm bolıp avtomorfizm bolmawı dálillendi.

Tayanış sózler: matritsalar algebrası, avtomorfizm, lokal avtomorfizm.

Rezyume. $M_n(\square), n \geq 2$ matritsalar algebrasida $\varphi(A) = A^{\text{tr}}$ akslantirishi lokal avtomorfizm bo'lib avtomorfizm bo'lmasligi isbotlanadi.

Tayanch so'zlar: matritsalar algebrası, avtomorfizm, lokal avtomorfizm.

Резюме. В алгебре матриц $M_n(\square), n \geq 2$ доказывается, что отображение $\varphi(A) = A^+$ является локальным автоморфизмом, но не является автоморфизмом.

Ключевые слова: алгебра матриц, автоморфизм, локальный автоморфизм.

Summary. In the matrix algebra $M_n(\square), n \geq 2$, it is proved that the mapping $\varphi(A) = A^+$ is a local automorphism but not an automorphism.

Key words: matrix algebra, automorphism, local automorphism.
