

UDK 517.95

BÓLSHEK TÁRTIPLI GIPERBOLALIQ TIPTEGI TEŇLEME USHIN BASLANǴISH-SHEGARALIQ MÁSELE

Otarova J.A., Bekieva A.A.

Qaraqalpaq mámleketlik universiteti

Házirgi waqıtta bólshek esaplaw teoriyası zamanagóy ámeliy matematikanıń eń intensiv rawajlanıp atırǵan bagdarlarınan biri bolıp esaplanadı. Sebebi bólshek differenciallıq teńlemeler pütün tártipli klassikalıq differenciallıq teńlemeler járdeminde durıs modellestiriw múmkin bolmagan yad, násillik, sonday-aq, keńislik-waqtılıq nolokallıq effektlerine iye bolǵan proceslerdi jáne de adekvat táriyiplewge imkaniyat beredi. Dástúriy modellerden parıqlı túrde bólshek tuwındılar úyrenilip atırǵan processtıń aldınǵı tariyxın esapqa aladı, bul bolsa olardı fizikalıq, biologiyalıq, injenerlik hám ekonomikalıq sistemalardı táriyiplewde nátiyjeli quralǵa aylandıradı [1-2].

Házirgi waqıtta bólshek differenciallıq teńlemeler matematikalıq fizika, jıllılıq ótkizgishlik teoriyası, jabısqaq-serpimli materiallar dinamikası, anomal diffuziya processleri, birtekli bolmagan ortalıqlarda tolqınların tarqalıwı, basqarıw teoriyası, biomedikalıq processler, sonday-aq ekonomikalıq-matematikalıq modellestiriw máselelerin izertlewde tabıslı qollanılmaqta. Bul izertlewlerde bólshek tuwındılarınıń hár qıylı anıqlamaları ayrıqsha áhmietke iye bolıp, olardıń ishinde eń kóp tarqalǵanı Kaputo mánisindegi bólshek tártipli tuwındı [6] bolıp tabıladı. Onıń qollanılıwı funkciya hám onıń pütün tártipli tuwındılarınıń mánisleri menen beriletuǵın klassikalıq baslanǵısh shártlerden paydalanıw imkaniyatın beredi, bul bolsa mäseleniń matematikalıq qoyılıwın áhmiyetli dárejede ańsatlastıradı hám alınǵan nátiyjelerdi ámeliy jaqtan qollanıw ushın qolaylı boladı.

Bólshek tártipli differenciallıq tenlemelerge baǵıshlangan jumıslardıń kópligine qaramastan, izertlewshilerdiń tiykargı itibarı diffuziya hám parabola tipindegi tenlemelerge qaratılǵan. Sonıń menen birge Kaputo mánisindegi bólshek tuwındılı giperbolikalıq teńlemeler ádewir az úyrenilgen, biraq tap usınday modeller ortalıqtıń ishki yadına iye tolqınlıq processlerdi táriyiplewge múmkinshilik beredi. Bunday máseleler ushın sheshimlerdiń bar bolıwı, birden-birligi sebebi áne usılar qarap atırılǵan modeldiń matematikalıq durıslıǵın támiyinleydi [3-4].

Sızıqlı baslanǵısh-shegaralıq máselelerdi izertlewdiń eń nátiyjeli usıllarınıń biri ózgeriwshilerdi ajratıw usılı bolıp tabıladı. Bul qatnastı paydalanıw dáslepki mäseleni menshikli funkciyalardı tolıq ortogonal sistemanı payda etetuǵın Shturm-Liuvill spektralıq máselesine alıp keliwge múmkinshilik beredi. Bul izlenip atırǵan sheshimdi Fure qatarı túrinde kórsetiwge, tarqalıw koefficientlerin anıqlaw bolsa bólshek tártipli differenciallıq tenlemeler sistemasın sheshiwge alıp keliwge imkaniyat beredi. Kaputo mánisindegi bólshek tuwındısın qollanıw jaǵdayında Laplas túrlendiriwın qollanıwǵa boladı, ol Mittag-Leffler funkciyalardı arqalı tarqalıw koefficientleri ushın analitikalıq ańlatpalardı alıwǵa múmkinshilik beredi.

$\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < \infty\}$ oblastta tómendegi teńlemenı qarastıramız

$$D_{0t}^{\alpha} u(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 1 < \alpha < 2, \quad (1)$$

bunda

$$D_{0t}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{1-\alpha} u''(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 2$$

Kaputo mánisindegi bólshek tártipli tuwındı [6]

$$\textbf{I-másele. } \Omega - \text{oblastta (1) teńlemenin } u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(1, t), \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t), \end{aligned} \quad t > 0, \quad (3)$$

shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıń.

1-teorema. Meyli $\varphi(x), \psi(x) \in C^2[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1), \psi(0) = \psi(1), \psi'(0) = \psi'(1)$, bolsa (1) - (3) mäseleniń sheshimi bar boladı.

Dáilew. Sheshimdi

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (4)$$

kóbeyme túrinde izleybiz. (4) izlengen sheshimdi (1) teńlemege orınlarına aparıp qoyamız hám ózgeriwshilerin ajratamız. Sonda:

$$\begin{aligned} \frac{D_{0t}^{\alpha} T(t)}{T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \\ \begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(1), X'(0) = X'(1) \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

kórinisindegi Shturm-Liuvill máselesine iye bolamız. Onıń sheshimi tómendegishe boladı:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Belgisiz turaqlılardı tabıw ushın baslanǵısh shártlerden paydalanamız. Sonda (5) spektral mäseleniń menshikli funkciyalardı tómendegishe boladı:

$$X_0(x) = 1, \quad X_{2k}(x) = \sqrt{2} \cos \lambda_k x, \quad X_{2k-1}(x) = \sqrt{2} \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = 2\pi k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(1)-(3) \text{ mäseleniñ sheshimin } u(x, t) = X_0(x) \cdot T_0(t) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (T_{2k}(t) \cos \lambda_k x + T_{2k-1}(t) \sin \lambda_k x), \quad (6)$$

qatar kórinisinde izleyimiz. Izlengen sheshimdi (1)-teñlemege qoyamız:

$$D_{0t}^{\alpha} T_0(t) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (D_{0t}^{\alpha} T_{2k}(t) \cos \lambda_k x + D_{0t}^{\alpha} T_{2k-1}(t) \sin \lambda_k x) - \\ - \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 T_{2k}(t) \cos \lambda_k x + \lambda_k^2 T_{2k-1}(t) \sin \lambda_k x) = 0.$$

Bul teñlemeni $1, \cos \lambda_n x, \sin \lambda_n x$ qa kóbeytip, $(0,1)$ de x boyınsha integrallap, tóمندegi teñlemelerge iye bolamız:

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha} T_0(t) = 0, \\ T_0(0) = \varphi_0, T_0'(0) = \psi_0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha} T_{2k}(t) - \lambda_k^2 T_{2k}(t) = 0, \\ T_{2k}(0) = \varphi_{2k}, T_{2k}'(0) = \psi_{2k} \end{cases} \quad (8)$$

bunda,

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x) X_0(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad \psi_0 = \int_0^1 \psi(x) X_0(x) dx = \int_0^1 \psi(x) dx,$$

$$\varphi_{2k} = \int_0^1 \varphi(x) X_{2k}(x) dx, \quad \psi_{2k} = \int_0^1 \psi(x) X_{2k}(x) dx,$$

$$\varphi_{2k-1} = \int_0^1 \varphi(x) X_{2k-1}(x) dx, \quad \psi_{2k-1} = \int_0^1 \psi(x) X_{2k-1}(x) dx.$$

(7)-(8) teñlemelerdiñ sheshimin Laplas túrlendiriwin qollaw arqalı tabamız.

$$D_{0t}^{\alpha} T(t) = (g \otimes T)(t), \quad g(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

$$L\{D_{0t}^{\alpha} T(t)\}(s) = L\{(g \otimes T)(t)\}(s) = L\{g(t)\}(s) \cdot L\{T(t)\}(s), \quad (9)$$

$$L\{g(t)\}(s) = L\left\{\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right\}(s) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{1-\alpha} dt = -\frac{s^{\alpha-2}}{\alpha \Gamma(2-\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\alpha} du, \quad (10)$$

$$\Gamma(2-\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{(2-\alpha)-1} du = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{1-\alpha} du = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\alpha} du \quad (11)$$

(11)-ti (10)-gi ornına qoyamız, sonda:

$$L\{g(t)\}(s) = s^{\alpha-2}, \quad 1 < \alpha < 2. \quad (12)$$

Endi $L\{T(t)\}(s)$ nı esaplaymız

$$L\{T(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} T(t) dt = s^2 \tilde{T}(s) - sT(0) - T'(0), \quad (13)$$

bunda

$$\tilde{T}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} T(t) dt.$$

(12)-(13)- teñlikti (9)-teñliktegi orınlarına qoyamız, sonda berilgen teñlemenıñ Laplas túrlendiriwine iye bolamız.

$$L\{D_{0t}^{\alpha} T(t)\}(s) = s^{\alpha} \tilde{T}(s) - s^{\alpha-1} T(0) - s^{\alpha-2} T'(0), \quad (14)$$

bul Laplas túrlendiriwin (7) teñlemege qollaymız.

$$\begin{cases} s^{\alpha} \tilde{T}_0(s) - s^{\alpha-1} T_0(0) - s^{\alpha-2} T_0'(0) = 0, \\ T_0(0) = \varphi_0, T_0'(0) = \psi_0. \end{cases}$$

$$s^{\alpha} \tilde{T}_0(s) - s^{\alpha-1} \varphi_0 - s^{\alpha-2} \psi_0 = 0,$$

$$\tilde{T}_0(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}} \varphi_0 + \frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha}} \psi_0, \quad \tilde{T}_0(s) = \frac{1}{s} \varphi_0 + \frac{1}{s^2} \psi_0.$$

Endi original funkciyanı tabamız:

$$T_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t,$$

(14) Laplas túrlendiriwin (8) teńlemege qollaymız.

$$\begin{cases} s^\alpha \tilde{T}_{2k}(s) - s^{\alpha-1} T_{2k}(0) - s^{\alpha-2} T_{2k}'(0) - \lambda_k^2 \tilde{T}_{2k}(s) = 0, \\ T_{2k}(0) = \varphi_{2k}, T_{2k}'(0) = \psi_{2k}. \end{cases}$$

$$s^\alpha \tilde{T}_{2k}(s) - s^{\alpha-1} \varphi_{2k} - s^{\alpha-2} \psi_{2k} - \lambda_k^2 T_{2k}(s) = 0,$$

$$(s^\alpha - \lambda_k^2) \tilde{T}_{2k}(s) = s^{\alpha-1} \varphi_{2k} + s^{\alpha-2} \psi_{2k},$$

$$\tilde{T}_{2k}(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda_k^2} \varphi_{2k} + \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha - \lambda_k^2} \psi_{2k}.$$

Bul teńlikke kerı Laplas túrlendiriwin tásir ettiremız:

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda_k^2} \right\} = E_{\alpha,1}(-\lambda_k^2 t^\alpha),$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha - \lambda_k^2} \right\} = t E_{\alpha,2}(-\lambda_k^2 t^\alpha).$$

Sonda (9) máseleniń sheshimi tómendegishe boladı:

$$T_{2k}(t) = E_{\alpha,1}(-\lambda_k^2 t^\alpha) \varphi_{2k} + t E_{\alpha,2}(-\lambda_k^2 t^\alpha) \psi_{2k},$$

$$T_{2k-1}(t) = E_{\alpha,1}(-\lambda_k^2 t^\alpha) \varphi_{2k-1} + t E_{\alpha,2}(-\lambda_k^2 t^\alpha) \psi_{2k-1}.$$

Demek, (1)-(3) máseleniń ulıwma sheshimi tómendegishe boladı:

$$u(x, t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(E_{\alpha,1}(-\lambda_k^2 t^\alpha) \varphi_{2k} + t E_{\alpha,2}(-\lambda_k^2 t^\alpha) \psi_{2k} \right) \cos \lambda_k x + \left(E_{\alpha,1}(-\lambda_k^2 t^\alpha) \varphi_{2k-1} + t E_{\alpha,2}(-\lambda_k^2 t^\alpha) \psi_{2k-1} \right) \sin \lambda_k x \right], \quad (15)$$

Bunda [5],

$$E_{\alpha,1}(-\lambda_n^2 t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda_n^{2k} t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

$$E_{\alpha,2}(-\lambda_n^2 t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda_n^{2k} t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 2)}.$$

Fure koefficientleri ushın tómendegiler órinli

$$|\varphi_{2k}| \leq \frac{C_1}{k^2}, \quad |\varphi_{2k-1}| \leq \frac{C_1}{k^2}, \quad |\psi_{2k}| \leq \frac{C_2}{k^2}, \quad |\varphi_{2k-1}| \leq \frac{C_2}{k^2},$$

Mittag-Leffler funkeiyası ushın tómendegi baxalaw órinli

$$|E_{\alpha,\beta}(-\lambda_n^2 t^\alpha)| \leq C_3, \quad 0 \leq t \leq T,$$

demek,

$$|T_{2k}(t)| \leq \frac{C_4}{k^2}, \quad |T_{2k-1}(t)| \leq \frac{C_5}{k^2}.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ qatar jıynaqlı, demek Veershtass belgisi boyınsha (15) qatar Ω – oblastta teń ólshemli jıynaqlı boladı.

2-teorema. Eger I-máseleniń regulyar sheshimi bar bolsa, onda ol birden-bir boladı.

Dáilew. Meyli I-másele eki $u_1(x, t)$ hám $u_2(x, t)$ sheshimge iye bolsın. Onda

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

dep olardıń ayırmasın belgileymiz. Onda $u(x, t)$ birtekli I-máseleni qanaatlandıradı. Tómendegilerdi qaraştıramız.

$$u_0(t) = \int_0^1 u(x, t) dx, \quad u_{2k}(t) = \int_0^1 u(x, t) X_{2k}(x) dx, \quad u_{2k-1}(t) = \int_0^1 u(x, t) X_{2k-1}(x) dx,$$

bulardı (1) teńlemege aparıp qoyıp, menshikli funkeiyalardıń ortogonallıǵınan paydalansaq tómendegilerdi alamız:

$$D_{0t}^\alpha u_0(t) = 0, \quad (16)$$

$$D_{0t}^\alpha u_{2k}(t) + \lambda_k^2 u_{2k}(t) = 0, \quad (17)$$

$$D_{0t}^{\alpha} u_{2k-1}(t) + \lambda_k^2 u_{2k-1}(t) = 0. \quad (18)$$

nóllik shegaralıq shártlerden

$$u_0(0) = 0, \quad u_0'(0) = 0, \quad (19)$$

$$u_{2k}(0) = 0, \quad u_{2k}'(0) = 0, \quad (20)$$

$$u_{2k-1}(0) = 0, \quad u_{2k-1}'(0) = 0. \quad (21)$$

shártler kelip shıǵadı. (19) shártten (16) teńlemenin sheshimi $u_0(t) = 0$ boladı. Endi (17) teńlemege Laplas túrlendiriwdi qollansaq, yaǵnıy

$$s^{\alpha} u_{2k}''(s) - s^{\alpha-1} u_{2k}(0) - s^{\alpha-2} u_{2k}'(0) + \lambda_k^2 u_{2k}(s) = 0,$$

$$(20) \text{ shártten } (s^{\alpha} + \lambda_k^2) u_{2k}(s) = 0 \text{ teńlikke iye bolamız. Bunnan } s^{\alpha} + \lambda_k^2 \neq 0, \text{ demek, } u_{2k}(s) = 0$$

boladı, yaǵnıy $u_{2k}(t) = 0$ boladı. Analogiyalı túrde (18) teńleme hám (21) shártlerden $u_{2k-1}(t) = 0$ boladı. Demek,

$$u_0(t) = 0, \quad u_{2k}(t) = 0, \quad u_{2k-1}(t) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Yaǵnıy, $u(x, t) = 0$. Bunnan $u_1(x, t) = u_2(x, t)$.

ÁDEBIYATLAR

1. Podlubny I. **Fractional differential equations**. - San Diego: Academic Press, 1999. - 340 p.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. **Theory and applications of fractional differential equations**. - Amsterdam: Elsevier, 2006. - 523 p.
3. Diethelm K. **The analysis of fractional differential equations**. - Berlin: Springer, 2010. - 247 p.
4. Mainardi F. **Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity**. - London: Imperial College Press, 2010. - 368 p.
5. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. **Mittag-Leffler functions, related topics and applications**. - Berlin: Springer, 2014. - 443 p.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. **Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения**. - Минск: Наука и техника, 1987. - 688 с.

Kasr tartibli giperbolik tipdagi tenglama uchun boshlang'ich chegaraviy masala

Annotatsiya: Maqolada $1 < \alpha < 2$ tartibli Kaputo kasr hosilasiga ega giperbolik tenglama uchun boshlang'ich-chegaraviy masala tadqiq etilgan. O'zgaruvchilarni ajratish usuli va Laplas almashtirishidan foydalanib, yechim Mittag-Leffler funksiyalari orqali analitik ko'rinishda olingan. Muntazam yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlangan hamda hosil qilingan qatorning tekis yaqinlashishi tadqiq etilgan.

Tayanch so'zlar: Kaputo kasr hosilasi, giperbolik tenglama, boshlang'ich-chegaraviy masala.

Начально-краевая задача для гиперболического уравнения дробного порядка

Аннотация: В статье исследуется начально-краевая задача для гиперболического уравнения с дробной производной Капуто порядка $1 < \alpha < 2$. Методом разделения переменных и преобразования Лапласа получено аналитическое представление решения через функции Миттаг-Леффлера. Доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения, а также исследована равномерная сходимость полученного ряда.

Ключевые слова: дробная производная Капуто, гиперболическое уравнение, начально-краевая задача.

The initial-boundary value problem for a fractional hyperbolic equation

Abstract: This paper investigates an initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with the Caputo fractional derivative of order $1 < \alpha < 2$. An analytical solution is obtained by the method of separation of variables combined with the Laplace transform and represented in terms of the Mittag-Leffler functions. The existence and uniqueness theorems for the regular solution are proved, and the uniform convergence of the resulting series is established.

Keywords: Caputo fractional derivative, hyperbolic equation, initial-boundary value problem/

Bólshek tártipli giperbolalıq tiptegi teńleme ushin baslang'ish-shegaralıq másele

Annotaciya: Maqalada Kaputo mánisindegi bólshek $1 < \alpha < 2$ tártipli giperbolikalıq teńleme ushin baslang'ish-shegaralıq másele úyrenigen. Analitikalıq sheshimdi dúziw ushın Shturm-Liuvill máselesine sáykes keliwshi menshikli funkciyalarnı boyınsha jiklewe tiykarlangan ózgeriwshilerdi ajratıw usılı qollanıladı. Baslang'ish-shegaralıq mäselenin regulyar sheshimnin bar bolıwı hám birden-birligi haqqındaǵı teoremlar dálillengen, sonday-aq, qurılǵan funktsional qatarın teń ólshewli jıyınalıǵı izertlengen. Alingan nátiyjeler bólshek tártipli differentsiallıq teńlemeler menen tártiplenetuǵın eslew effektine iye terbelis processlerdin matematikalıq izertlewe paydalanıw múmkin.

Tayanış sózler: Kaputo mánisindegi bólshek tártipli tuwındı, giperbolikalıq tenleme, baslang'ish-shegaralıq másele.