

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ ФИШЕРА ПРИ ЦЕНЗУРИРОВАНИИ СПРАВА

Абдикаликов Ф.А., Эрисбаев С.А., Сейтахов Р.П

Каракалтакский государственный университет имени Бердаха

1. Введение. Информация Фишера является фундаментальным понятием математической статистики, определяющим меру количества информации, которую несет наблюдаемая случайная величина относительно неизвестного параметра распределения. Введенная Р. Фишером в 1925 году [1], эта концепция легла в основу теории оценивания, в частности, через неравенство Крамера-Рао, устанавливающее нижнюю границу дисперсии несмещенных оценок.

В современной прикладной статистике анализ информации Фишера приобретает особую актуальность при работе с **цензурированными данными**, которые характерны для анализа выживаемости, теории надежности, медицины и экономики. Цензурирование возникает в ситуациях, когда точное значение времени наступления интересующего события (например, отказа технического устройства или выздоровления пациента) известно лишь частично — например, из-за прекращения наблюдения или наступления конкурирующего риска.

Особую сложность представляют модели, в которых механизм цензурирования связан с самим анализируемым процессом. В связи с этим в литературе выделяют два основных подхода:

1. *Неинформативное цензурирование*, где время цензурирования и время жизни независимы.

2. *Информативное цензурирование*, при котором между этими величинами существует зависимость, что существенно усложняет структуру правдоподобия и расчет информационных матриц.

Несмотря на глубокую проработку классических моделей, вычисление информации Фишера через функции интенсивностей (hazard functions) остается важной вычислительной задачей. Такой подход позволяет не только упростить аналитические выкладки, но и более наглядно интерпретировать статистические потери, возникающие при наличии цензурирования справа.

В данной работе рассматривается декомпозиция информации Фишера в терминах функций интенсивностей для обеих моделей, а также предлагается алгоритм численного расчета, позволяющий оценить эффективность статистических выводов в условиях неполных данных.

2. Информация Фишера и неравенство Крамера-Рао. Информация Фишера представляет собой меру количества информации, которую несут наблюдаемые данные относительно неизвестных параметров вероятностной модели. В контексте цензурированных данных, где время до наступления целевого события (например, отказа технического устройства или терминальная стадия заболевания) наблюдается лишь частично, информация Фишера становится критически важным инструментом для оценки эффективности параметров и определения статистической значимости результатов.

Для независимых и одинаково распределенных наблюдений общая информация Фишера в выборке определяется как сумма информации каждого отдельного наблюдения. В случае регулярного семейства функций плотности $f(x, \theta)$ на R , информация Фишера для скалярного параметра θ задается выражением:

$$I(\theta) = \int_R \left(\frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x, \theta) dx. \quad (1)$$

Если параметр $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)^T$ является s -мерным вектором, то вводится вектор парциальных производных логарифмической функции правдоподобия:

$$\frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta_s} \right)^T.$$

В этом случае $I(\theta)$ представляет собой информационную матрицу Фишера размера $s \times s$. Предположим, что матрица $I(\theta)$ является симметричной и несингулярной.

Пусть $T(X) = (T_1(X), \dots, T_s(X))^T$ некоторая статистика, выступающая в качестве оценки для вектор-функции параметров $\varphi(\theta) = (\varphi_1(\theta), \dots, \varphi_s(\theta))^T$, где $E_\theta T_j(X) = \varphi_j(\theta)$. Если функции $\varphi_j(\theta)$ дифференцируемы, определим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} = \left\| \frac{\partial \varphi_i(\theta)}{\partial \theta_j} \right\|_{i,j=1,s}.$$

Информационное неравенство Крамера-Рао устанавливает нижнюю границу для ковариационной матрицы $Cov_\theta(T(X))$ статистики T :

$$Cov_\theta(T(X)) \geq \frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} [I(\theta)]^{-1} \left(\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} \right)^T. \quad (2)$$

В частном случае, когда $\theta \in \Theta$ - неизвестный скалярный параметр, а $\theta(X)$ - его несмещенная оценка, неравенство (2) упрощается до классического вида:

$$\text{Var}(\theta(X)) \geq \frac{1}{I(\theta)}. \quad (3)$$

Достижение нижних границ в неравенствах (2) или (3) свидетельствует об эффективности соответствующих оценок. В настоящей работе мы выводим аналитические выражения для информации Фишера через функции интенсивности (hazard rate functions) для моделей неинформативного и информативного случайного цензурирования справа, а также реализуем их расчет с помощью методов численного интегрирования.

3. Неинформативное и информативное случайное цензурирование справа. Предположим, что на некотором вероятностном пространстве заданы независимые случайные величины (с.в.) ξ и η с функциями распределения $F(x, \theta)$ и $G(x, \theta)$ соответственно, где $\theta \in \Theta \subseteq R$. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ - выборка независимых и одинаково распределенных (н.о.р.) величин, имеющих то же распределение, что и ξ , а $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ - н.о.р. величины, распределенные как η .

В модели случайного цензурирования справа наблюдаемыми являются пары (Z_i, δ_i) для $1 \leq i \leq n$, где:

$$Z_i = \min(X_i, Y_i), \delta_i = I(X_i \leq Y_i), i = 1, \dots, n,$$

здесь $I(A)$ - индикатор события A . Случайные величины $Z_i, i = \overline{1, n}$, имеют функцию распределения $H(x, \theta) = 1 - (1 - F(x, \theta))(1 - G(x, \theta))$. Совокупность данных $C^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i)\}_{i=1}^n$ широко используется в анализе выживаемости и теории надежности, где ξ интерпретируется как время до наступления целевого события, а η как время цензурирования. Цензурирование называется *неинформативным*, если функция правдоподобия разлагается в произведение двух компонент, одна из которых зависит только от параметров распределения ξ , а другая либо зависит от непересекающегося подмножества параметров η , либо вовсе не содержит параметров.

Совместная плотность пары (Z, δ) относительно произведения доминирующей меры μ на R и считающей меры ν на $\{0, 1\}$ имеет вид:

$$k(x, y; \theta) = [f(x; \theta)(1 - G(x, \theta))]^y \cdot [g(x; \theta)(1 - F(x; \theta))]^{1-y} \quad (4)$$

где f и g - функции плотности для F и G . Соответствующая функция логарифмического правдоподобия:

$$L_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \log k(Z_i, \delta_i; \theta). \quad (5)$$

Авторы работ [2] и [3] установили нижние границы для дисперсии параметрической функции $\varphi(\theta)$ на основе цензурированных данных $C^{(n)}$. Ими были получены аналоги границ Крамера-Рао и Бхаттачарьи, известные для полных выборок, а также определены условия, при которых данные границы являются достижимыми. В свою очередь, Пракаса Рао [5-7] исследовал байесовский подход к данной задаче, получив нижние границы для риска, аналогичные результатам Абдушукурова и Кима [2], а также представил оценки для различных классов статистических критериев

4. Условия регулярности. Для корректного определения информации Фишера введем следующие условия:

(C1) Плотности $f(x, \theta)$ и $g(x, \theta)$ дифференцируемы по θ , при этом

$$\int_R \left| \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} \right| \mu(dx) < \infty, \quad \int_R \left| \frac{\partial g(x; \theta)}{\partial \theta} \right| \mu(dx) < \infty.$$

(C2) Маргинальные информации Фишера ξ и η конечны и положительны:

$$0 < I_\xi(\theta) = E_\theta \left[\frac{\partial \log f(\xi; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 < \infty, \quad 0 < I_\eta(\theta) = E_\theta \left[\frac{\partial \log g(\eta; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 < \infty.$$

(C3) Носитель $\{x: f(x; \theta)(1 - G(x; \theta)) = 0\} \cup \{x: g(x; \theta)(1 - F(x; \theta)) = 0\}$ не зависит от параметра θ ;

(C4) Информация Фишера для пары (Z, δ) удовлетворяет условию:

$$0 < I(\theta) = E_\theta \left[\frac{\partial \log k(Z, \delta; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 < \infty.$$

Как показано в [2], при выполнении условий (C1)–(C4) информация Фишера в цензурированной выборке равна $I_n(\theta) = nI(\theta)$, где

$$I(\theta) = \int_R \left[\frac{\partial \log(f(x; \theta)(1 - G(x; \theta)))}{\partial \theta} \right]^2 (1 - G(x; \theta)) dF(x; \theta) + \\ + \int_R \left[\frac{\partial \log(g(x; \theta)(1 - F(x; \theta)))}{\partial \theta} \right]^2 (1 - F(x; \theta)) dG(x; \theta). \quad (6)$$

Более того, если распределение G не зависит от параметра θ (неинформативное цензурирование), формула упрощается:

$$I(\theta) = I_G(\theta) = \int_R \left[\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 (1 - G(x)) dF(x; \theta) + \int_R \left[\frac{\partial \log(1 - F(x; \theta))}{\partial \theta} \right]^2 (1 - F(x; \theta)) dG(x). \quad (7)$$

В модели пропорциональных интенсивностей (МПИ)

$$1 - G(x; \theta) = (1 - F(x; \theta))^\beta, \quad -\infty < x < \infty, \quad (8)$$

при $\beta > 0$, информация Фишера принимает вид:

$$I(\theta) = I_\beta(\theta) = (1 + \beta) \cdot \int_R \left[\frac{\partial \log(f(x; \theta)(1 - G(x; \theta)))}{\partial \theta} \right]^2 (1 - G(x; \theta)) dF(x; \theta). \quad (9)$$

5. Представление через функции интенсивности

Основным результатом данной работы является использование функций интенсивности

$$\mu(x; \theta) = \frac{f(x; \theta)}{1 - F(x; \theta)}, \quad \lambda(x; \theta) = \frac{g(x; \theta)}{1 - G(x; \theta)}, \quad \gamma(x; \theta) = \frac{h(x; \theta)}{1 - H(x; \theta)} = \mu(x; \theta) + \lambda(x; \theta) \quad (10)$$

соответствующие распределениям F , G и H с плотностью h . Следует отметить, что в анализе выживаемости и теории надежности функция интенсивности является фундаментальной характеристикой случайной величины, так как она описывает мгновенный риск наступления события в момент времени t при условии, что до этого момента событие не произошло. Использование интенсивностей позволяет более глубоко интерпретировать структуру наблюдаемых данных. Представленная ниже теорема развивает идеи, заложенные в лемме 1.1.9 из основополагающей работы [1], и расширяет их на случай информативного цензурирования.

Теорема.[9]. При условиях (C1) - (C4) информация Фишера выражается как:

$$I(\theta) = \int_R \left[\frac{\partial \log \mu(x; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 (1 - G(x; \theta)) dF(x; \theta) + \int_R \left[\frac{\partial \log \lambda(x; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 (1 - F(x; \theta)) dG(x; \theta). \quad (11)$$

При МПИ (8) информация Фишера зависит только от суммарной интенсивности γ :

$$I(\theta) = I_z(\theta) = \int_R \left(\frac{\partial \log \gamma(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dH(x; \theta). \quad (12)$$

Следствие 1. В случае отсутствия цензурирования ($G \equiv 0$) из выражения (11) непосредственно следует, что информация Фишера совпадает с маргинальной информацией исходной величины ξ :

$$I(\theta) = I_\xi(\theta) = \int_R \left(\frac{\partial \log \mu(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dF(x; \theta). \quad (13)$$

Стоит отметить, что Эфрон и Джонстон [4] получили формулу (13) альтернативным методом, основанным на линейном преобразовании в пространстве L_2 , сохраняющем норму.

Следствие 2. Представление информации Фишера через функции интенсивности (11) позволяет получить следующие фундаментальные неравенства, справедливые для всех $\theta \in \Theta$

$$I_{(Z, \delta)}(\theta) \leq 2 \min(I_\xi(\theta), I_\eta(\theta)) \quad (14)$$

Данное ограничение вытекает из свойств функций распределения $F(x; \theta) \geq 0$ и $G(x; \theta) \geq 0$. Кроме того, выполняются неравенства:

$$I_{(Z, 1)}(\theta) \leq I_\xi(\theta), \quad I_{(Z, 0)}(\theta) \leq I_\eta(\theta). \quad (15)$$

В частности, при неинформативном цензурировании, когда распределение G не зависит от параметра θ , имеем $I_{(Z, 0)}(\theta) = I_\eta(\theta) = 0$. Следовательно: $I_{(Z, \delta)}(\theta) = I_{(Z, 1)}(\theta) \leq I_\xi(\theta)$, $\theta \in \Theta$. (16)

Замечание. Из равенства (12) следует важный статистический вывод: при определенных условиях индикаторная переменная δ , фиксирующая факт цензурирования наблюдения Z , не несет дополнительной информации Фишера о параметре θ базового распределения F (подробнее см. также [8]). Важно подчеркнуть, что данный факт неочевиден и не следует напрямую из классического представления (9), что подтверждает преимущество предложенного подхода через функции интенсивности.

6. Численное моделирование и сравнительный анализ информации Фишера при информативном и неинформативном цензурировании

В данном разделе проводится сравнительный анализ поведения информации Фишера в условиях неполных данных. Основное внимание уделяется исследованию потерь информативности при независимом (неинформативном) цензурировании и возможности сохранения или прироста информации в информативных моделях. Когда выборка $\xi^{(n)} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ подвергается случайному цензурированию справа, аналитическое вычисление информации Фишера по формулам (11) или (13) часто сопряжено со значительными математическими трудностями. Для многих стандартных распределений (например, при использовании распределения Вейбулла, логнормального или гамма-распределения в качестве базовых) интегралы, входящие в состав информационных матриц, не выражаются через элементарные функции. В таких случаях для получения точных оценок необходимо использовать методы численного интегрирования.

6.1. Численное вычисление информации Фишера при неинформативном случайном цензурировании справа. В случаях, когда выборка подвергается случайному цензурированию справа, вычисление информации Фишера сталкивается с определенными аналитическими трудностями. Для многих теоретических распределений данная величина не выражается в явном виде, что обуславливает необходимость применения численных методов интегрирования.

В рамках данного исследования рассматривался случай, когда целевая случайная величина X имеет нормальное распределение $N(\theta, 1)$, с плотностью $f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$, цензурирующая величина Y также предполагалась распределенной по нормальному закону $N(0, 1)$. также предполагалась распределенной по нормальному закону

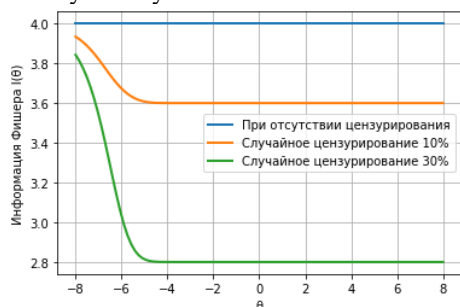


Рис. 1. Информация Фишера при отсутствии цензурирования и при цензурировании справа данных 10% и 30%

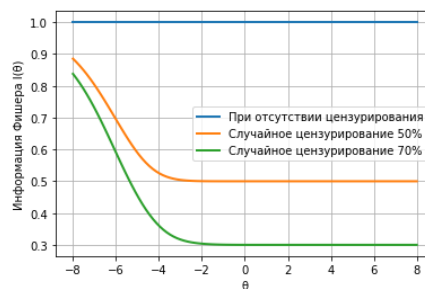


Рис. 2. Информация Фишера при отсутствии цензурирования и при цензурировании справа данных 50% и 70%

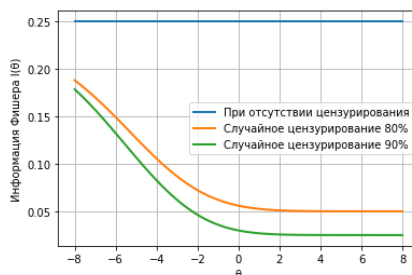


Рис. 3. Информация Фишера при отсутствии цензурирования и при цензурировании справа данных 80% и 90%

Анализ графиков (Рис. 1–3) показывает, что в случае полных (нецензурированных) данных информация Фишера остается константой. Однако при наличии цензурирования наблюдается монотонное убывание количества информации Фишера с ростом значения неизвестного параметра θ . Причем, чем выше процент цензурированных данных, тем существеннее потери информации.

Ниже приведены количественные показатели, полученные в ходе имитационного моделирования:

Таблица 1: Значения информации Фишера в неинформативных моделях при различных уровнях цензурирования.

Значения θ	Значения информации Фишера $I(\theta)$:					
	при $\sigma = 0.5$		при $\sigma = 1$		при $\sigma = 2$	
	Нецензур-я	Цензур-я 10 %	Нецензур-я	Цензур-я 50 %	Нецензур-я	Цензур-я 80 %
-8,0000	4.0000	3,9467	1.0000	0,8795	0,2500	0,1881
-7,0303	4.0000	3,8478	1.0000	0,7950	0,2500	0,1706
-6,0606	4.0000	3,6827	1.0000	0,6863	0,2500	0,1506
-5,0909	4.0000	3,6041	1.0000	0,5885	0,2500	0,1291
-4,1212	4.0000	3,6000	1.0000	0,5293	0,2500	0,1081
-3,1515	4.0000	3,6000	1.0000	0,5058	0,2500	0,0895

-2,1818	4.0000	3,6000	1.0000	0,5006	0,2500	0,0746
-1,2121	4.0000	3,6000	1.0000	0,5000	0,2500	0,0640
-0,2424	4.0000	3,6000	1.0000	0,5000	0,2500	0,0572
0,7273	4.0000	3,6000	1.0000	0,5000	0,2500	0,0533
1,6970	4.0000	3,6000	1.0000	0,5000	0,2500	0,0514
2,6667	4.0000	3,6000	1.0000	0,5000	0,2500	0,0505
3,6364	4.0000	3,6000	1.0000	0,5000	0,2500	0,0502
4,6061	4.0000	3,6000	1.0000	0,5000	0,2500	0,0500
5,5758	4.0000	3,6000	1.0000	0,5000	0,2500	0,0500
6,5455	4.0000	3,6000	1.0000	0,5000	0,2500	0,0500
7,5152	4.0000	3,6000	1.0000	0,5000	0,2500	0,0500
8,0000	4.0000	3,6000	1.0000	0,5000	0,2500	0,0500

6.2. Численное вычисление информации Фишера при информативном случайном цензурировании справа. В отличие от предыдущей модели, при информативном цензурировании предполагается зависимость механизма цензурирования от неизвестного параметра.

Теперь, рассмотрим случай, когда случайная величина ξ имеет нормальное распределение с плотностью:

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; \infty), \quad \theta \in (-\infty; \infty), \quad \sigma > 0, \text{ где } \sigma - \text{известный параметр, а } \eta \text{ также имеет нормальное}$$

распределение с плотностью параметрами (θ, σ^2) , то есть $g(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$. Численный анализ данной модели

(Рис. 4–6) выявил иную динамику.

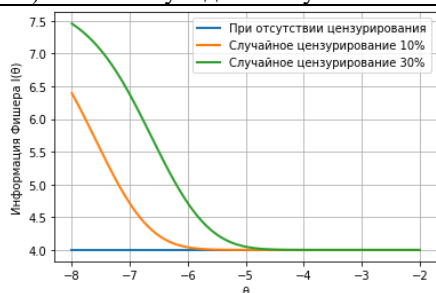


Рис. 4. Информация Фишера при отсутствии цензурирования и при цензурировании справа данных 10% и 30% процентов для значений $\sigma = 0.5$

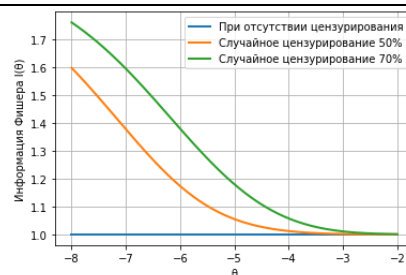


Рис. 5. Информация Фишера при отсутствии цензурирования и при цензурировании справа данных 50% и 70% процентов для значений $\sigma = 1$

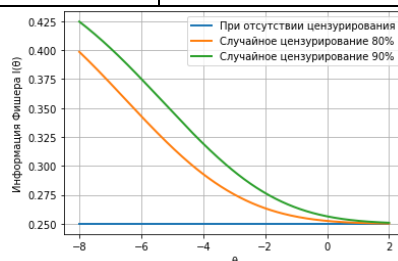


Рис. 6. Информация Фишера при отсутствии цензурирования и при цензурировании справа данных 80% и 90% процентов для значений $\sigma = 2$

Сравнительный анализ показывает, что в информативных моделях, несмотря на увеличение степени цензурирования, значение информации Фишера может превышать показатели неинформативных моделей. Это объясняется тем, что сам факт цензурирования в данной модели несет в себе дополнительную информацию о параметре θ .

Таблица 2: Значения информации Фишера в информативных моделях

Значения θ	Значения информации Фишера: $I(\theta)$					
	при $\sigma = 0.5$		при $\sigma = 1$		при $\sigma = 2$	
	Нецензур-я	Цензур-я 10 %	Нецензур-я	Цензур-я 50 %	Нецензур-я	Цензур-я 80 %
-8,0000	4,0000	6,3992	1,0000	1,5972	0,2500	0,3986
-7,3970	4,0000	5,7686	1,0000	1,5226	0,2500	0,3825
-6,7940	4,0000	5,1169	1,0000	1,4437	0,2500	0,3656
-5,5879	4,0000	4,2448	1,0000	1,2886	0,2500	0,3315
-4,9849	4,0000	4,0867	1,0000	1,2204	0,2500	0,3156
-4,6834	4,0000	4,0498	1,0000	1,1900	0,2500	0,3082
-4,3819	4,0000	4,0285	1,0000	1,1624	0,2500	0,3012

-4,0804	4,0000	4,0164	1,0000	1,1375	0,2500	0,2946
-3,7789	4,0000	4,0095	1,0000	1,1153	0,2500	0,2886
-3,4774	4,0000	4,0055	1,0000	1,0959	0,2500	0,2831
-2,8744	4,0000	4,0015	1,0000	1,0644	0,2500	0,2736
-2,2714	4,0000	4,0003	1,0000	1,0415	0,2500	0,2662
-1,6683	4,0000	4,0000	1,0000	1,0257	0,2500	0,2606
-1,0653	4,0000	4,0000	1,0000	1,0152	0,2500	0,2566
-0,4623	4,0000	4,0000	1,0000	1,0085	0,2500	0,2539
-0,1608	4,0000	4,0000	1,0000	1,0063	0,2500	0,2529
0,4422	4,0000	4,0000	1,0000	1,0032	0,2500	0,2516
1,3467	4,0000	4,0000	1,0000	1,0010	0,2500	0,2506

Проведенный численный анализ подтверждает теоретические выводы о том, что при неинформативном цензурировании всегда происходят потери информации Фишера, тогда как информативное цензурирование позволяет частично компенсировать или даже перераспределить информативность выборки.

7. Заключение. В данной работе проведено комплексное исследование структуры информации Фишера в условиях случайного цензурирования справа для неинформативной и информативной моделей. На основании полученных теоретических результатов и проведенного численного анализа можно сделать следующие выводы:

1. **Теоретическая значимость:** Доказано, что информация Фишера относительно неизвестного параметра может быть декомпозирована и представлена через функции интенсивности наблюдаемых величин. Это представление позволяет наглядно интерпретировать механизм потери статистической информации, возникающей из-за неполных данных.

2. **Анализ неинформативной модели:** Численное моделирование для нормального распределения (Раздел 3.3) подтвердило, что при неинформативном цензурировании информация Фишера всегда меньше, чем в полных данных. Установлено, что с увеличением степени цензурирования (от 10% до 90%) и ростом значения параметра θ наблюдается монотонное убывание информационной насыщенности выборки.

3. **Особенности информативной модели:** В отличие от классического случая, информативное цензурирование (Раздел 4) демонстрирует более сложную динамику. Установлено, что зависимость механизма цензурирования от оцениваемого параметра может частично компенсировать потери информации. В ряде случаев информативность цензурированной выборки может быть сопоставима с полной выборкой за счет дополнительных данных, содержащихся в самом факте цензурирования.

4. **Практическая применимость:** Разработанные численные алгоритмы и полученные графические зависимости позволяют оценивать ожидаемую точность статистических оценок (через неравенство Крамера-Рао) в экспериментальных исследованиях, где данные подвергаются случайному отсеву.

Таким образом, предложенный подход к вычислению информации Фишера является эффективным инструментом для анализа качества статистических моделей в условиях неполных данных, обеспечивая теоретическую базу для построения оптимальных оценок параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fisher R.A. Theory of Statistical Estimation. / Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 1925, p 700-725.
2. Abdushukurov A.A. On effectiveness of statistical estimates under random censoring of observations and a new estimates in proportional hazards model. Candidate Dissertation. Tashkent. 1988.
3. Abdushukurov A.A., Kim L.V. Lower Cramer-Rao and Bhattacharya bounds for randomly censored data. J. Soviet. Math., 1987. v.38, N.5. p. 2171 - 2185.
4. Efron B., Jonstone I.M. Fisher's information in terms of the hazard rate. Ann. Statist., 1990. v. 18. N. 1. p. 38-62.
5. Prakasa Rao, B.L.S. Remarks on Cramer-Rao type integras inequalities for randomly censored data. In «Analysis of Censored Data». Lecture Notes-Monograph Series. 1995. N. 27. p. 163-175.
6. Prakasa Rao, B.L.S. Improved Cramer-Rao inequality revisited for randomly censored data. JIRSS. 2018. v. 17. N. 02. p. 1-12.
7. Prakasa Rao, B.L.S. Cramer-Rao inequality revisited for randomly censored data. Proceedings of scientific – applied conf. «STATISTICS and its application -V». 17-19 oktober, 2019. Tashkent. p. 19-28.
8. Zheng G., Gastwirth J.L. Fisher information in ordered randomly censored data with application to characterization problems problem. Statistica Sinica. 2003. v. 13. p. 507-517.
9. Abdushukurov A.A. Erisbaev S.A. Fisher information decomposition in terms of hazard rate functions under random censoring from the right. / Electronic J. Science and education in Karakalpakstan» 2020. N.3-4, p.36-43.
10. Абдушукуров А. А., Эрисбаев С. А. Информация Фишера и неравенство типа крамерарао для модели конкурирующих рисков / Bulletin of the Institute of Mathematics. 2022.v.4. N.5. p.50-59.
11. Abdushukurov A.A., Erisbaev S.A. On Fisher information function in competing risks model under random censoring from unobervation intervals and efficiency. /Bulletin of the Institute of Mathematica 2022. v.5. N.3. p.13-19.
12. Abdushukurov A.A., Erisbaev S.A. Influence of Informativeness of Censoring on the Efficiency of Parametrical Estimators. // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, 45(4), p. 1544–1556.
13. Abdushukurov A.A., Nurmukhamedova N.S., Erisbaev S.A. Fisher information contained in incomplete observations. // Industrial Laboratory. Materials Diagnostics, 2024, 90(7), p. 84-92.

Rezyume. Ushbu maqolada ehtimollar zichligi oilasi regular bo'lgan holda o'ngdan tasodifiy senzurlashning noinformativ va informativ modellari ko'rib chiqiladi. Noma'lum skalyar parametrga bog'liq Fisher informatsiyasi kuzatilayotgan miqdorlarning intensivlik funksiyalari orqali ifodalanishi ko'rsatilgan. Bu ifoda senzurlanish tufayli ma'lumotlar yo'qotilishining statistik tuzilishini ochib beradi. Shuningdek, taklif etilgan formulalarning to'liq bo'lmagan tanlanmalar modellarida parametrlarni baholash uchun yaroqliligini tasdiqlovchi sonli tatbiq natijalari keltirilgan.

Kalit soʻzlar: oʻngdan tasodifiy senzurlanish, intensivlik funksiyasi, Fisher informatsiyasi, regulyarlik shartlari.

Resume. This paper considers non-informative and informative right random censoring models under the regularity conditions of the probability density family. It is shown that the Fisher information for an unknown parameter can be expressed via the hazard rate functions of the observed variables. This formula reveals the statistical structure of information loss due to censoring. The results of numerical implementation of the proposed formulas are presented, confirming their applicability for parameter estimation with incomplete data.

Key words: random right censoring, hazard rate function, Fisher information, regularity conditions.

Резюме. В данной работе рассматриваются неинформативная и информативная модели случайного цензурирования справа при условии регулярности семейства плотностей вероятностей. Показано, что информация Фишера относительно неизвестного скалярного параметра может быть представлена через функции интенсивностей наблюдаемых величин. Данное представление раскрывает статистическую структуру потерь информации, обусловленных цензурированием. Приводятся результаты численной реализации предложенных формул, подтверждающие их применимость для оценки параметров в условиях неполных данных.

Ключевые слова: случайное цензурирование справа, функция интенсивности, информация Фишера.
