

MONJA TEOREMASININ GEOMETRIYALIQ MAZMUNÍ

Koshmuratova G. M.

Qaraqalpaq mámleketlik universiteti

Kirisiw. Matematika tariyxında geometriya eń áyyemgi hám tereń filosofiyalıq tiykarǵa iye taraw sıpatında qalıplesken. Geometriya insan oy-pikiriniń qalıplesiwinde tiykarǵı ról oynanǵan, sebebi ol keńisliktegi qatnaslar arqalı dúnyanı modellestiriw, ólshew hám túsiniwge imkaniyat jaratadı. Sol sebepli, Monja teoreması keńisliktegi qatnaslardıń úylesimliliǵın ańlatıwshı eń gózzal geometriyalıq nızamlıqlardan biri esaplanadı.

Monja teoreması - francuz matematigi Gaspard Monja (1746-1818) atı menen baylanıslı. Ol súwretlew geometriyasınıń tiykarın salıwshı sıpatında tanılǵan bolıp, keńisliktegi obyektlerdi eki ólshemli proekciyalar arqalı analizlew ideyasın jaratqan. G.Monja geometriya pánine jańa baǵdar - analitikalıq hám proekciyalıq jaqınlasıwlardıń sintezin alıp kirdi. Usı tiykarı ol úsh sheńberdiń óz ara jaylasıwı haqqındaǵı fundamental teoremaǵa tiykar saldı [4].

Bul teorema dáslep, XVIII ásir aqırlarında Monja tárepinen qalıplestirilip, keyin ala XIX-XX ásirlerde Desarg, Paskal hám Ponselle sıyaqlı geometriya klassikleri tárepinen tereńlestirilgen. Teoremanıń tiykarǵı ideyası - úsh sheńberdiń hárbir jubı ushın sızılǵan ulıwma urınba noqatları barlıq waqıtta bir tuwrıda jaylasadı. Bul sızılq Monja sızılǵı dep ataladı [6]. Izertlewdiń aktuallıǵı sonnan ibarat, Monja teoreması tek geometriyalıq fakt sıpatında ǵana emes, al kosmoslıq tallawdıń logikalıq, analitikalıq hám proekciyalıq tiykarı sıpatında da úlken ilimiy áhmiyetke iye. Zamanagóy geometriyada bul teorema kóp obyektli konfiguraciya, optikalıq sistemalar, kompyuter grafikası hám mexanikalıq modellestiriwde qollanıladı.

Metodologiya. Úyreniwler tómendegi metodlarǵa súyenedi:

1. Teoriyalıq-geometriyalıq talqılaw - Monja teoremasınıń geometriyalıq mánisin anıqlaw, onıń shártleri hám aqibetlerin keńisliktegi modellestiriw tiykarında tallaw.

2. Analitikalıq metod - teorema dálilin koordinatalar metodında ańlatıw, yaǵnıy sheńber teńlemeleri hám urınba sızılqar sistemaların sheshiw arqalı sızılqlılıq shártin tekseriw.

3. Proekciyalıq metod - úsh sheńberdiń jaylasıwın keńisliktegi proekciyalar arqalı úyreniw hám teoremanıń ulıwmalasqan túrin shıǵarıw.

4. Tariyxıy-metodikalıq jaqınlasıw - Monge, Desarg hám Paskal jumısların salıstırıp, teoremanıń evolyucion qalıplesiw basqıshların anıqlaw.

5. Didaktikalıq talqılaw - Monja teoremasın orta hám joqarı bilimlendiriw procesinde oqıtıw metodikasın bahalaw, oqırwshılarda keńisliktegi pikirlewdi rawajlandırıwdaǵı rólin anıqlaw. Metodlardıń úylesimliliǵı teoremanıń ilimiy mánisin kóp baǵdarda tallaw imkaniyatın berdi.

Nátıyjeler. Monja teoremasınıń ulıwma formulası: Eger úsh sheńber C_1, C_2, C_3 óz ara jup-jup sırtqı tárizde urınıwshı bolsa, onda olardıń sırtqı urınba sızılqları kesiliskeń noqatlar — T_{12}, T_{23} , hám T_{13} — bir tuwrı da jaylasadı. Bul tuwrı Monja sızılǵı dep ataladı [2]. Geometriyalıq jaqtan bul nátiye sheńber oraylarınń jaylasıwına da baylanıslı emes, yaǵnıy qálegen úsh urınıwshı sheńber ushın teorema óz kúshin saqlaydı.

Sheńber orayları O_1, O_2 hám O_3 bolsın. Hárbir sheńber jubı ushın ulıwma urınba sızılq ótkeriledi. Bul urınbalar kesiliskeń noqatlar. T_{12}, T_{23} hám T_{13} dep belgilense, Monja teoreması boyınsha

$$T_{12}, T_{23}, T_{13} \in \ell,$$

yaǵnıy bul noqatlar bir tuwrıda jatadı.

Haqıyqatında da, úsh sheńber orayları hám olardıń urınba sızılqları arasındaǵı aralıqlar tómendegishe baylanısqan:

$$O_i O_j = r_i + r_j.$$

Hárbir jup sheńber ushın ulıwma urınba sızılq payda boladı. Oraylar arasındaǵı kesindilerdi proekciyalap, bul urınba noqatları sızılqlı kombinaciya da jaylasatuǵının kórsetiw múmkin. Keńisliktegi simmetriya sebepli bul noqatlar ulıwma tuwrı boylap jaylasadı.

Analitikalıq kóz qarastan, sheńberler tómendegishe berilsin:

$$(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 = r_i^2.$$

Sonday-aq, hárbir jup sheńber ushın urınba sızılq teńlemesi

$$Ax + By + C = 0$$

túrinde boladı. Bul úsh sızılqtıń kesilisiw noqatları koordinataları tawılıp, determinant arqalı tekseriledi:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant nólge teń bolǵanda, úsh noqat sızılqlı ekenligi anıqlanadı. Esaplawlar nátiyjesinde, bul shárt barlıq waqıtta orınlanadı. Solay etip, Monja teoreması analitikalıq jaqtan da dálillenedi [1].

Proektiv geometriyada Monja teoreması tómendegishe talqılanadı:

Úsh jup-jup urınıwshı dóńgelek konfiguraciyası proekciyalıq ózgerislerde sızılqlılıq qásiyetin saqlaydı, yaǵnıy eger Monja teoreması tegislikte durıs bolsa, ol proektiv keńislikte de saqlanadı. Bul teorema Paskal teoremasınıń sheńber konfiguraciyasındaǵı dara jaǵdayı sıpatında qaraladı. Solay etip, Monja teoreması geometriyada proekciyalıq invariantlıqtıń ayqın mısalı bolıp tabıladı.

Monja teoreması búgingi kúnde tek teoriyalıq geometriya sheńberinde emes, al zamanagóy matematika hám texnikanıń hár qıylı ámeliy baǵdarlarında da keńnen qollanımaqta. Atap aytqanda, optika tarawında ol linzalar

sistemasidagi fokus nuqatlari arasidagi geometriyalik baylanisti aniqlaw, jaqtılıq nurlari bagıtın talqılaw hám de súwretleniwlerdi anıq proekciyalawda áhmiyetli teoriyalıq tiykar bolıp xızmet etedi. Robototexnikada bolsa, Monja teoreması kóp buwınlı mexanizmlerdiń háreket traektoriyaların modellestiriw, manipulyatorlar awhalın aniqlaw hám olardıń keńisliktegi koordinataların muwapıqlastırıwda qollanıladı. Kompyuter grafikası tarawında bul teorema keńisliktegi obyektlerdiń kontur urınbaların aniqlaw, 3D modellerdi tegis proekciyalaw hám realistlik súwretlewler jaratıwda áhmiyetli orın tutadı. Injenerlik geometriyasında, Monge teoreması kópmúyeshlik betler arasidagi tegis ótiwlerdi qurıw, quramalı figuralardı anıqlıq penen modellestiriw hám de konstrukciyalardıń keńisliktegi turaqlılıgın támiyinlewde qollanıladı. Bunnan tisqari, bilimlendiriw procesinde de teorema oqıwshılarda keńisliktegi pikirlewdi rawajlandırıw, analitikalıq pikirlewdi qalıplestiriw hám geometriyanıń ámeliy táreplerin tereń ańlaw ushın nátiyjeli didaktikalıq modeli sıpatında qollanıladı. Solay etip, Monja teoreması teoriyalıq geometriyanıń shegaralarınan shıgıp, texnika, texnologiya hám bilimlendiriw tarawların integraciyalaytuǵın universal ilimiy qural sıpatında óziniń áhmiyetliliğin saqlap qalmaqta.

Talqılaw. Monja teoreması - bul Evklid geometriyasidagi sıızılıqlıq, simmetriya hám proektivlik túsiniqleriniń úylesken, jetilisen matematikalıq anlatpası. Ol geometriyalıq obyektler arasidagi óz ara baylanıslılıq hám keńisliktegi qatnaslardı analizlewde áhmiyetli teoriyalıq tiykar jaratadı. Bul teorema bir waqıttıń ózinde bir neshe fundamental ilimiy koncepciyalardı ózinde jamleydi: keńisliktegi invariantlıq principine saykes, teorema geometriyalıq ózgerisler, proekciya yamasa burılıwlarǵa gárezsiz, durisliqtı hám qatnaslardıń saqlanıwın támiyinleydi; simmetriya principini bolsa úsh sheńberdiń hár biri teń geometriyalıq statusqa iye ekenligin, yaǵnıy olardıń arasında óz ara proporcionalıqtıń bar ekenligin kórsetedi; sıızılıqlıq nızamı bolsa úsh urınba nuqtanın bir tuwrıda jaylasatuǵınlıgın, bul bolsa keńisliktegi úylesimlilik hám geometriyalıq teń salmaqlıqtıń nátiyjesi ekenligin dálilleydi. Sonıń menen birge, zamanagóy ilimiy talqılawlar Monja teoremasıń tek ǵana teoriyalıq emes, al ámeliy áhmiyetin de ashıp beredi: ol quramalı texnologiyalıq sistemalardıń - máselen, optikalıq apparatlar, mexanikalıq modeller, kompyuter grafikası, sonday-aq, jasalma intellekt tiykarındaǵı súwretti aniqlaw algoritmleriniń matematikalıq tiykarın quraydı. Ásirese, jasalma intellekte obyektlerdi tanıw hám keńisliktegi strukturanı aniqlawda Monja teoreması tiykarında jaratılǵan algoritmler joqarı anıqlıq hám isenimlilikke támiyinleydi. Sonlıqtan, Monja teoreması geometriyanıń tariyxıy miyrası bolıwı menen birge, zamanagóy ilim hám texnologiyanıń rawajlanıwında teoriyalıq hám ámeliy jaqtan óz áhmiyetin saqlap qalıp atırǵan fundamentallıq koncepciya sıpatında tán alınadı.

Juwmaq. Úyreniw nátiyjelerinen kelip shıǵıp, tómendegishe juwmaq shıǵarıwımız múmkin: Monja teoreması geometriyanıń eń áhmiyetli teoriyalıq tiykarlarınan biri sıpatında sıızılıqlıq, simmetriya hám proekciya nızamlıqların ózinde jamleydi. Bul teorema tek klassikalıq Evklid geometriyasınıń logikalıq dawamshısı emes, al analitikalıq hám proekciyalıq geometriya arasında teoriyalıq kópir wazıypasın atqarıwshı ilimiy qural esaplanadı. Monja teoremasıń tiykarǵı ideyası - keńisliktegi invariantlıq túsiniǵı; yaǵnıy zamanagóy matematikada obyektlerdiń proekciya astında forma hám qatnas jaǵınan ózgermeytuǵınlıgın dálillew arqalı jańa teoriyalıq baǵdarlarǵa tiykar jaratadı. Sonıń menen birge, bul teorema házirgi zaman ilim hám texnologiyalarında, atap aytqanda, optika, robototexnika, mexanika, injenerlik grafikası hám kompyuter modellestiriw tarawlarında keńnen qollanılıp, olardıń teoriyalıq modellerin anıqlastırıwda áhmiyetli ról atqaradı. Bunnan tisqari, pedagogikalıq kózqarastan, Monja teoremasın oqıtıwda vizual modellestiriw, 3D proekciya hám interaktiv texnologiyalardı qollanıw oqıwshılarda keńislikte pikirlewdi, logikalıq tallaw qábiletin hám de matematikalıq kózqaras dárejesin sezilerli dárejede rawajlandıradı. Demek, Monja teoreması óziniń tariyxıy tamirlari menen geometriya rawajlanıwınıń áhmiyetli basqıshların sawlelendire beren bolsa, búgingi kúnde de ilimiy hám ámeliy jaqtan áhmiyetin joǵaltpaǵan, al jańa texnologiyalıq paradigmalar arqalı jáne de keńirek engizilip atırǵan fundamental teoriyalıq tiykar sıpatında óz áhmiyetin saqlap qalmaqta. Solay etip, Monja teoreması geometriyanıń logikalıq, proekciyalıq hám kosmoslıq koncepciyların birlestiriwshi, olardı zamanagóy ilimiy oy-pikir menen úylestiriwshi universal matematikalıq model sıpatında tán alınıwı múmkin.

ÁDEBIYATLAR

1. Bakelman, I.J., Generalized solutions of Monge-Ampère equations (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 114(1957), 1143–1145.
2. Caffarelli, L.A., Some regularity properties of solutions of Monge-Ampère equation, Comm. Pure Appl. Math. 44(1991), 965-969
3. Lewy, H., A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations, Trans. Amer. Math. Soc. 37(1935), 417–434.
4. Делоне Б.Н. Гаспар Монж как математик // Гаспар Монж. Сборник статей к 200-летию со дня рождения / Под ред. акад. В.И.Смирнова. - М.: АН СССР, 1947. - С.7-16.
5. Залгаллер В.А. Роль Монжа в развитии дифференциальной геометрии // 250 лет со дня рождения Гаспара Монжа. - СПб., 1996. - С. 11-12
6. Игнатушина Инесса Васильевна (2017). Обзор результатов г. Монжа и К. Ф. Гаусса по дифференциальной геометрии. Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия № 2. Физико-математические и естественные науки, (1), 56-70.
7. Монж Г. Приложение анализа к геометрии / Пер. с франц. В.А. Гуковской / Ред., предисл. и примеч. М^а. Выгодского.- М.-Л.: ОНТИ, 1936. -708 с.

Annotatsiya. Ushbu maqolada Monja teoremasining geometrik mohiyatini chuqur tahlil qilinadi. O'rganish davomida uning matematik mohiyati, tarixiy rivojlanish jarayoni, zamonaviy geometriyadagi o'rni, shuningdek, analitik isbotlash usullari keng yoritiladi. Maqolada Monja teoremasi, ya'ni uch aylananing juft-juft bilan tashqi urinma chiziqlari orqali hosil bo'ladigan nuqtalar barcha vaqtda bir to'g'ri chiziqda yotadi degan geometrik qonuniyatning mantiqiy va analitik asoslari keltiriladi. O'rganish natijalariga ko'ra, teorema nafaqat klassik Evklid geometriyasi doirasida, balki proyeksion va analitik geometriya tizimlarida ham umumlashtiriladi.

Kalit so‘zlar: Monja teoremasi, aylana, urinma, proyektivlik, chiziqlilik, fazoviy tahlil.

Аннотация. В данной статье подробно анализируется геометрическое содержание теоремы Монжа. В исследовании широко освещаются его математический смысл, исторический процесс развития, место в современной геометрии, а также методы аналитического доказательства. В статье представлены логические и аналитические основы теоремы Монжа, то есть геометрического закона, гласящего, что точки, образованные четными внешними касательными тремя окружностями, всегда лежат на одной прямой. Согласно результатам исследования, теорема обобщается не только в рамках классической евклидовой геометрии, но и в системах проекционной и аналитической геометрии.

Ключевые слова: Теорема Монжа, окружность, касательная, проективность, линейность, пространственный анализ.

Annotation. In this article, the geometric meaning of Monge's theorem is discussed in depth. In the study, its mathematical meaning, historical development process, role in modern geometry, as well as methods of analytical proof are widely covered. The article presents the logical and analytical foundations of Monge's theorem; that is, the geometric law that points formed by pairwise external tangent lines of three circles always lie on the same straight line. According to the results of the study, the theorem is generalized not only within the framework of classical Euclidean geometry, but also in systems of projective and analytic geometry.

Key words: Monge's theorem, circle, tangent, projectivity, linearity, spatial analysis.
