

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

¹Елгондиев К.К., ¹Камалова О.Х., ²Сагынбай А.С.

¹Каракалпакский государственный университет им. Бердаха

²Каспийский университет технологий и инжиниринга им.Ш.Есенова

Введение. Теория дифференциальных уравнений с импульсивными эффектами является важной и быстро развивающаяся область современной математики. Эта область тесно связана с широким применением теории дифференциальных уравнений в анализе многочисленных математических моделей, описывающие различные процессы, возникающие в механике, биологии, химии, экономике и многих других научных, технологических и практических областях. Такие области часто включают в себя явления и процессы краткосрочного или резкого характера, включая внезапные скачки, потрясения вызывающие прерывистые эффекты [1]. Первоначально при математическом моделировании явлений импульсивного или скачкообразного типа обобщенные функций, в частности дельта-функции Дирака. Однако этот подход не всегда хорошо соответствуют понятию классических решений дифференциальных уравнений, которые обычно используются в качестве математических моделей таких процессов.

В дальнейшем были введены дифференциальные уравнения с разрывными правыми сторонами. описывающие процессы, характеризующиеся внезапными изменениями в их поведении. К сожалению, это подход часто ограничивал эффективное применение классических методов современной теории дифференциальных уравнений. В настоящее время системы, испытывающие импульсные эффекты, чаще всего описываются дифференциальными уравнениями, действующими на интервалах, где импульсы не возникают, в сочетании с дополнительными условия, известные как условия импульсивных воздействий [1,2]. Эти условия математически определяют, как траектория системы резко меняется с одного пути на другой по заданному правилу. Импульсные дифференциальные уравнения обычно классифицируются на две категории: те, в которых импульсы возникают в заданные фиксированные моменты времени, и те, в которых импульсы возникают в переменные (не фиксированные) моменты времени [1,5,8]. В первом случае моменты импульса известны априори. Во втором случае эти моменты определяются дополнительными условиями, так как например, когда система достигает определенных предписанных значений или критических точек своих характеристик [11].

В настоящее время теория систем с импульсными эффектами является не только важным практическим применением дифференциальных уравнений, но также является источником значительных математических проблем. Дополнительные импульсивные условия порождают множество нетривиальных математических задач и порождают уникальные свойства, характерные исключительно для импульсивных дифференциальных уравнений. В самом деле, даже линейные уравнения обычно приобретают нелинейные свойства, когда для этих уравнений поставлены условия импульсных воздействий. Одним из главных последствий импульсивных действий является глубокая модификация их в качественном поведении решений систем дифференциальных уравнений. Условия импульсивных воздействий могут повлиять на разрешимость задачи, продолжение решений и их устойчивость. Они также могут приводят к существованию решений в более широких функциональных классах, например квазипериодических решения, которые не происходят в соответствующих системах без импульсов. Тем более, даже линейные системы с импульсивными эффектами могут проявлять хаотичную динамику [4, 5, 10,11]. Например, такие системы могут иметь множество периодических решений с разными периодами. сосуществование в соответствии с распоряжением Шарковского [6]. Вопросам существования, качественного поведения и коаксиальной разветвленности периодических решений различных классов дифференциальных уравнений с импульсным воздействием посвящено множество исследований. Настоящая работа посвящена исследованию проблем, связанных с существованием периодические решения системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с импульсивными эффектами в фиксированные моменты времени.

1.Постановка задачи. Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{dY}{dt} = AY, \quad (1)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

с начальным условием

$$Y(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

и условием импульсных воздействий:

$$\Delta Y(t)|_{t=t_k} = \begin{pmatrix} x(t)|_{t=t_k} \\ y(t)|_{t=t_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{1k} \end{pmatrix} = I_k, \quad k=1,2,\dots \quad (4)$$

Относительно моментов импульсного воздействия предполагаем, что $t_k > t_m$ при $k > m$ и $t_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Величины импульсных воздействий $I_k, k=1,2,\dots$ таковы, что $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \neq 0$.

Нормальная система линейных дифференциальных уравнений вида (1),(3) при условии (4) называется линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Решением задачи (1)-(4) называется двумерная вектор-функция $Y=Y(t, t_0, Y_0, t_k, I_k)$, определенная в множестве $\bigcup_{k=0}^{\infty} (t_k, t_{k+1})$, непрерывная справа в точках $t=t_k, k=1,2,\dots$, удовлетворяющая системе (1) при $t \neq t_k, k=1,2,\dots$, начальному условию (3) при $t=t_0$ и условиям импульсных воздействий (4) при $t=t_k, k=1,2,\dots$.

Возникает вопрос: при каких условиях на моменты $t=t_k, k=1,2,\dots$ и величин импульсных воздействий $I_k, k=1,2,\dots$ решение задачи (1)-(4) становится периодической. С некоторым периодом $T > 0$ Исследованию этого вопроса посвящается данная работа.

2.Существование решений. Существование решений задачи (1)-(4) доказывается непосредственным построением. Учитывая, что собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A являются действительными и различными решение задачи (1)-(4) записывается в виде

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{t_0 < t_p \leq t} I_p [e^{\lambda_1(t-t_p)} - e^{\lambda_2(t-t_p)}] \\ y_0(t) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{t_0 < t_p \leq t} I_p [\lambda_1 e^{\lambda_1(t-t_p)} - \lambda_2 e^{\lambda_2(t-t_p)}] \end{pmatrix} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{\lambda_2 x_0 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1(t-t_0)} - \frac{\lambda_1 x_0 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2(t-t_0)} \\ y_0(t) &= \frac{\lambda_2 x_0 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} - \frac{\lambda_1 x_0 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2 e^{\lambda_2(t-t_0)} \end{aligned} \quad (6)$$

3. Условия периодичности решения. Рассмотрим задачу нахождения условий при выполнении которых решения задачи (1)-(4) определенная формулой (5), (6) окажется периодической с некоторым периодом $T > 0$. Будем предполагать, что решение $Y(t)$ задачи (1)-(4) принадлежит пространству $C^{(\infty)}(R^1 \setminus J)$, где $J = \{t_p \in R^1; p \in Z\}$.

Теорема 1. Если задача (1)-(4) имеет периодическое с некоторым периодом $T > 0$ решение, то существует натуральное число m такое, что для любого целого числа p имеет место равенства

$$I_{p+m} = I_p, \quad t_{p+m} = t_p + T \quad (7)$$

Доказательство. Пусть задача (1)-(4) имеет периодическое решение $Y^*(t)$.

Покажем вначале, что если $t_{p_0} \in J$ для некоторого целого p_0 и $I_{p_0} \neq 0$, то существует целое число p_1 такое, что $t_{p_1} \in J$ и $t_{p_1} = t_{p_0} + T$.

Предположим противное. Если $t_{p_1} = t_{p_0} + T \notin J$, то вектор-функция $Y^*(t)$ является непрерывной в точке $t = t_{p_0} + T$, в то время как $Y^*(t)$ имеет разрыв в точке первого рода при $t = t_{p_0}$ причем в силу (4) выполняется неравенство

$$Y^*(t_{p_0} + 0) - Y^*(t_{p_0} - 0) = I_{p_0} \neq 0,$$

что с учетом периодичности вектор функции $Y^*(t)$ приводит к противоречию.

Таким образом, если $t_{p_0} \in J$ для некоторого целого p_0 и $I_{p_0} \neq 0$, то существует целое число p_1 такое, что $t_{p_1} \in J$ и $t_{p_1} = t_{p_0} + T$. Обозначим $p_1 - p_0 = m \geq 1$. Тогда в силу произвольности точки $t_{p_0} \in J$ равенства $t_{p+m} = t_p + T$ выполняются для всех $p \in Z$.

Рассмотрим теперь значение вектор-функции $Y^*(t)$ при $t = t_{p_0}$ и $t = t_{p_0} + T$, где p_0 произвольное целое число. В силу периодичности вектор-функции $Y^*(t)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} Y^*(t) &= Y^*(t + T), \quad t \in (t_{p_0-1}, t_{p_0+1}) \setminus \{t_{p_0}\}, \\ Y^*(t_{p_0} - 0) &= Y^*(t_{p_0} + T - 0), \quad Y^*(t_{p_0} + 0) = Y^*(t_{p_0} + T + 0). \end{aligned}$$

Тогда из условия импульсных воздействий (4), находим

$$\begin{aligned} I_{p_0} &= Y^*(t_{p_0} + 0) - Y^*(t_{p_0} - 0) = \\ &= Y^*(t_{p_0} + T + 0) - Y^*(t_{p_0} + T - 0) = I_{p_0+m} \end{aligned}$$

Из этого равенства, в силу произвольности p_0 , получаем $I_{p+m} = I_p$ для всех $p \in Z$.

Теорема 2. *Предположим, что имеет место условие периодичности (7) и выполнено одно из следующих условий:*

$$\begin{aligned} (\lambda_2 x_0 - y_0)(1 - e^{\lambda_1 T}) &= e^{\lambda_1 T} e^{\lambda_1 t_0} \sum_{p=1}^m I_p e^{-\lambda_1 t_p}, \\ (\lambda_1 x_0 - y_0)(1 - e^{\lambda_2 T}) &= e^{\lambda_2 T} e^{\lambda_2 t_0} \sum_{p=1}^m I_p e^{-\lambda_2 t_p}. \end{aligned}$$

Тогда существует периодическое с периодом T решение задачи (1)–(4) и это решение является единственным.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы рассмотрим различные случаи, зависящие от вида собственных значений матрицы A системы (1).

Поскольку $\lambda_1, \lambda_2 \in R^1$ тогда соотношения из тождества $Y(t) \equiv Y(t+T)$ для определения начальных значений получим следующую систему

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{p=1}^k I_p [e^{\lambda_1(t-t_p)} - e^{\lambda_2(t-t_p)}] \\ y_0(t) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{p=1}^k I_p [\lambda_1 e^{\lambda_1(t-t_p)} - \lambda_2 e^{\lambda_2(t-t_p)}] \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Откуда

$$Y(t+T) = \begin{pmatrix} x_0(t+T) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{p=1}^{k+m} I_p [e^{\lambda_1(T+t-t_p)} - e^{\lambda_2(T+t-t_p)}], \\ y_0(t+T) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{p=1}^{k+m} I_p [\lambda_1 e^{\lambda_1(T+t-t_p)} - \lambda_2 e^{\lambda_2(T+t-t_p)}] \end{pmatrix}$$

и с учетом условий теоремы 1, можем записать,

$$Y(t+T) = \begin{pmatrix} x_0(t+T) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{p=1}^m I_p [e^{\lambda_1(T+t-t_p)} - e^{\lambda_2(T+t-t_p)}] + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{p=1}^k I_p [e^{\lambda_1(t-t_p)} - e^{\lambda_2(t-t_p)}], \\ y_0(t+T) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{p=1}^m I_p [\lambda_1 e^{\lambda_1(T+t-t_p)} - \lambda_2 e^{\lambda_2(T+t-t_p)}] + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{p=1}^k I_p [\lambda_1 e^{\lambda_1(t-t_p)} - \lambda_2 e^{\lambda_2(t-t_p)}] \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$x_0(t) = \frac{\lambda_2 x_0 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1(t-t_0)} - \frac{\lambda_1 x_0 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2(t-t_0)} \quad y_0(t) = \frac{\lambda_2 x_0 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} - \frac{\lambda_1 x_0 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2 e^{\lambda_2(t-t_0)} \quad (10)$$

Учитывая, что t – произвольное, из тождества $Y(t) \equiv Y(t+T)$ и формул (8)–(10) находим:

$$\begin{aligned} (\lambda_2 x_0 - y_0)(1 - e^{\lambda_1 T}) &= e^{\lambda_1 T} e^{\lambda_1 t_0} \sum_{p=1}^m I_p e^{-\lambda_1 t_p}, \\ (\lambda_1 x_0 - y_0)(1 - e^{\lambda_2 T}) &= e^{\lambda_2 T} e^{\lambda_2 t_0} \sum_{p=1}^m I_p e^{-\lambda_2 t_p}. \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, что если $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, то равенства (11), рассматриваемые как система уравнений относительно величин x_0, y_0 , имеют единственное решение.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим случай, когда в системе (1) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, в начальном условии (2), $Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, а моменты и величины импульсных воздействий выбираются согласно системе (8), в виде

$t_1 = \frac{1}{2}, I_1 = -3e^{-\frac{3}{2}}, t_2 = 1, I_2 = 3\frac{(1+e)}{e^2}, t_3 = \frac{3}{2}, I_3 = -3e^{-\frac{3}{2}}$. При этих значениях моментов и величин импульсных

воздействий из условия (6) следует, что $m=3$ и $T \geq \frac{3}{2}$. Решением задачи (1)-(4) является вектор-функция

$$Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \text{ где } x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}(e^{(t-\frac{1}{2})} - e^{-(t-\frac{1}{2})}), & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}(e^{(t-\frac{1}{2})} - e^{-(t-\frac{1}{2})}) + \frac{3(1+e)}{2e^2}(e^{(t-1)} - e^{-(t-1)}), & 1 \leq t < \frac{3}{2}, \\ 0, & \frac{3}{2} \leq t \leq 2. \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}(e^{(t-\frac{1}{2})} + e^{-(t-\frac{1}{2})}), & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}(e^{(t-\frac{1}{2})} + e^{-(t-\frac{1}{2})}) + \frac{3(1+e)}{2e^2}(e^{(t-1)} + e^{-(t-1)}), & 1 \leq t < \frac{3}{2}, \\ 0, & \frac{3}{2} \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Интегральная кривая полученного решения приведена на рис.1, соответствующая этому решению траектория является разрывным циклом приведенный на рис. 2 .

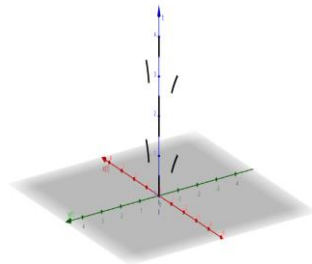


Рис. 1 Интегральная кривая

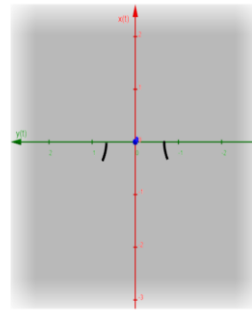


Рис. 2 Фазовая траектория

Рассмотрим теперь случай, когда собственные значения этой матрицы A действительные и равные, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае решение задачи (1)-(4) записывается в виде

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) + \sum_{t_0 < t_p \leq t} I_p(t-t_p)e^{\lambda(t-t_p)}, \\ y_0(t) + \sum_{t_0 < t_p \leq t} I_p(1+\lambda(t-t_p))e^{\lambda(t-t_p)} \end{pmatrix} \quad (12)$$

где

$$x_0(t) = [x_0 + (t-t_0)(y_0 - \lambda x_0)]e^{\lambda(t-t_0)}, \quad y_0(t) = [y_0 + \lambda(t-t_0)(y_0 - \lambda x_0)]e^{\lambda(t-t_0)} \quad (13)$$

Достаточные условия периодичности решения в данном случае могут быть сформулированы в виде.

Теорема 3. *Предположим, что имеет место условие периодичности (7) для всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует периодическое с периодом T решение задачи (1) – (4) и это решение является единственным.*

Пусть T произвольное неотрицательное число, для которого существует натуральное число m такое, что для всех $p \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства (7). Выясним, при каких дополнительных условиях на начальные данные t_0, Y_0 , величины $I_k, t_k, k = \overline{1, m}$ и значения T возможно выполнение тождества $Y(t) \equiv Y(t+T)$, где вектор-функция $Y(t)$ – решение задачи (1)-(4), $t \in \mathbb{R}^1$.

Поскольку $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}^1$ тогда соотношения из тождества $Y(t) \equiv Y(t+T)$ для определения начальных значений получим следующую систему

$$(y_0 - \lambda x_0)(1 - e^{\lambda T}) = \sum_{p=1}^m I_p e^{-\lambda t_p} e^{\lambda(T+t_0)},$$

$$(x_0 - (y_0 - \lambda x_0)t_0)(1 - e^{\lambda T}) = \left[-\sum_{p=1}^m I_p t_p e^{-\lambda t_p} + T \left((y_0 - \lambda x_0)e^{-\lambda t_0} + \sum_{p=1}^m I_p e^{-\lambda t_p} \right) \right] e^{\lambda(T+t_0)}, \quad (14)$$

$$(y_0 - \lambda t_0(y_0 - \lambda x_0))(1 - e^{\lambda T}) = \left[\sum_{p=1}^m I_p (1 - \lambda t_p) e^{-\lambda t_p} + \lambda T \left((y_0 - \lambda x_0)e^{-\lambda t_0} + \sum_{p=1}^m I_p e^{-\lambda t_p} \right) \right] e^{\lambda(T+t_0)}.$$

Очевидно, что если $\lambda \neq 0$, то равенства (14), рассматриваемые как уравнения относительно величин x_0, y_0 имеет решение

$$x_0 = \frac{e^{\lambda(T+t_0)}}{1-e^{\lambda T}} \left[(t_0+1) \sum_{p=1}^m I_p e^{-\lambda t_p} - \sum_{p=1}^m I_p t_p e^{-\lambda t_p} + \frac{e^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}} \sum_{p=1}^m I_p e^{-\lambda t_p} \right]$$

$$y_0 = \frac{e^{\lambda(T+t_0)}}{1-e^{\lambda T}} \left[\lambda(t_0+T) \sum_{p=1}^m I_p e^{-\lambda t_p} - \lambda \sum_{p=1}^m I_p t_p e^{-\lambda t_p} + \frac{(\lambda T-1)e^{\lambda T}+1}{1-e^{\lambda T}} \sum_{p=1}^m I_p e^{-\lambda t_p} \right].$$

Таким образом, теорема 3 для случая действительных собственных значений матрицы A системы (1) доказана.

Пример 2. В качестве примера рассмотрим случай, когда матрица системы (1) имеет вид $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{64} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Собственные значения этой матрицы являются вещественными и равными, причем $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{8}$. Для простоты считаем, что начальное условие (2) задано в виде $Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда моменты t_k и величины I_k импульсных

воздействий согласно системе (3) могут быть выбраны следующим образом: $t_1 = 1, I_1 = e^{\frac{1}{8}}, t_2 = 2, I_2 = -2e^{\frac{1}{4}}, t_3 = 3, I_3 = e^{\frac{3}{8}}$.

При этих значениях моментов и величин импульсных воздействии из условия (6) следует, что $m=3$ и $T \geq 3$. Решением задачи (1)-(3) является вектор функция $Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, где

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ (t-1)e^{\frac{1}{8}t}, & 1 \leq t < 2, \\ (3-t)e^{\frac{1}{8}t}, & 2 \leq t < 3, \\ 0, & 3 \leq t \leq T \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ \frac{1}{8}(t+7)e^{\frac{1}{8}t}, & 1 \leq t < 2, \\ -\frac{1}{8}(t+5)e^{\frac{1}{8}t}, & 2 \leq t < 3, \\ 0, & 3 \leq t \leq T \end{cases}$$

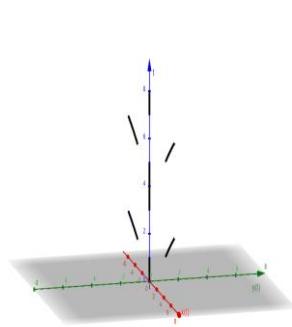


Рис. 3 Интегральная кривая

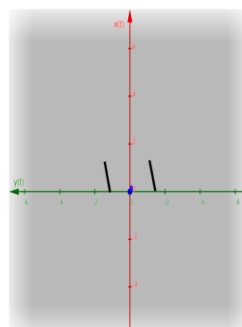


Рис. 4 Фазовая траектория

ЛИТЕРАТУРА

1. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. World Scientific Series on Non-Linear Sciences. Ser. A. V.14. –Singapore: World Scientific. -1995. 462 p.
2. Akhmet M.U. Li–Yorke chaos in the system with impacts// J. Math. Anal. Appl. 351 (2009), P. 804–810.
3. Samoilenko V.Hr., Yelgondiyev K.K. On existence of periodical solutions for differential equations with impulsive effects// Jorn. Facta Universitatis / Series: Mechanics, automatic control and robotics, 1998. №2(2). P.635-639
4. Samoilenko A.M., Samoilenko V.G., Sobchuk V.V. On periodic solutions of the equation of a nonlinear oscillator with pulse influence, Ukr. Math. J., 51 (1999), 926–933. doi:10.1007/BF02591979
5. Samoilenko V.G., Elgondiyev K.K. On periodic solutions of linear differential equations with pulsed influence, Ukr. Math. J., 49 (1997), 156–164. doi:10.1007/BF02486623
6. Sharkovsky A.N., Kolyada S.F., Sivak A.G., Fedorenko V.V. Dynamics of one-dimensional maps, Springer Dordrecht, 2010. doi:10.1007/978-94-015-8897-3
7. Skripnik N.V. Averaging method for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side, Mat.Stud., 55 (2021), no.1, 76–84. doi:10.30970/ms.55.1
8. Elgondiyev K. Oscillatory processes under impulsive perturbations// J. Mat. Stud. 65 (2026), P. 107–112.
9. Elgondiyev K.K., Matmuratova S., Borodin V., Vovk L. Total energy of harmonic oscillator with impulse action// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка/ Серія: Математика. Механіка. 1(41), 2020, 56-60 с.

10. Анашкин О.В., Седова Н.О., Юсупова О.В.// Бифуркация периодических решений дифференциального уравнения с импульсным воздействием/ Динамические системы, 2017, 7(35). №4, 395-403 с.
11. Vasile Lupulescu, Akbar Zada // Linear impulsive dynamic systems on time scales// Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2010 , № 11 , 1-30 p.

Annotatsiya. Ushbu maqolada impuls ta'siriga ega ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi yechimlarining davriyligi uchun zaruriy va yetarli shartlarni topish masalasi ko'rib chiqilgan. Sistema matritsasining xos qiymatlari haqiqiy va turlicha bo'lgan holat tadqiq etilgan. Bunday sistemalarning yechimi aniq ko'rinishda qurilgan va yagona davriy yechim, davriy yechimlarning ikki parametrli oilasi mavjudligining zaruriy va yetarli shartlari aniqlangan. Yakunda tushuntirish beruvchi misol keltirilgan bo'lib, unda qaralgan sistema yechimining integral egri chizig'i va traektoriyasi grafiklari chizilgan.

Kalit so'zlar: differensial tenglamalar, impuls ta'sirlari, yechimlar, davriylik shartlari.

Аннотация. Рассмотрена задача о необходимых и достаточных условиях периодичности решений линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с импульсным воздействием для случая, когда собственные значения матрицы системы являются действительными и различными. Построено решение таких систем, а также получены необходимые и достаточные условия существования как единственного периодического решения, так и двухпараметрического семейства периодических решений. Построен пример, начерчены интегральная кривая и соответствующая траектория решения рассмотренной в примере системы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, импульсные воздействия, решения, условия периодичности.

Abstract. This paper considers the problem of finding necessary and sufficient conditions for the periodicity of solutions to second-order linear differential equation systems with impulsive effects. We investigate the case where the eigenvalues of the system matrix are real and distinct. The solution for such systems is explicitly constructed, and the necessary and sufficient conditions for the existence of both a unique periodic solution and a two-parameter family of periodic solutions are established. Finally, an illustrative example is provided, along with the plots of the integral curve and the corresponding solution trajectory of the system considered in the example.

Key words: differential equations, impulsive effects, solutions, periodicity conditions.
