

ДВУМЕРНАЯ АЛГЕБРА ЗИНБИЕЛЯ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 3

Курбанбаев Т.К., Туремуратова Б.

Каракалтакский государственный университет имени Бердаха.

Введение. Напомним, что алгебры Лейбница были введены в начале 90-х годов прошлого столетия французским математиком Ж.-Л. Лоде [5] и определяются тождеством Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

Нетрудно видеть, что если в алгебре Лейбница потребовать также выполнение тождества антикоммутативности, то тождество Лейбница преобразуется в тождество Якоби. Таким образом, алгебры Лейбница являются «некоммутативным» аналогом алгебр Ли.

В работе [8] показано, что Кошулева дуальность для алгебры Лейбница приводит к алгебре с тождеством

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) + x \circ (z \circ y)$$

В дальнейшем, алгебры, задающиеся этим тождеством, получили название алгебр Зинбиеля. Отметим, что слово «Zinbiel» получается из слова «Leibniz» в обратной записи.

Известная диаграмма Ж.-Л. Лоде состоит из определенного расположения многообразий алгебр и диалгебр, которые являются Кошулево дуальными по отношению к вертикальной оси, проходящей через ассоциативные алгебры [6], [7]. Кроме того, для категорий диассоциативных алгебр, алгебр Ли, алгебр Лейбница, алгебр Зинбиеля, дендриформных алгебр, диассоциативных алгебр, ассоциативных и коммутативно-ассоциативных алгебр указаны правила их связей.

Отметим, что задача классификацию конечномерных алгебр Зинбиеля исследовано в работах Б. Омирова, Ж. Адашева и А. Худойбердиева [1], [2], [3].

В данной работе мы классифицируем двумерное и трехмерное алгебра Зинбиеля над полем характеристики 3. Известно, что произвольная поле характеристики 3 изоморфно $\mathbf{Z}_3$. Тогда мы рассмотрим алгебру Зинбиеля над полем $\mathbf{Z}_3$.

Предварительные сведения.

Определение 1. Алгебра A над полем F называется *алгеброй Зинбиеля*, если для любых $x, y, z \in A$ выполняется тождество:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) + x \circ (z \circ y)$$

где $\circ$ – умножение в A .

Пример 1 [4]. Пусть $C^\infty[0; 1]$ – множество всех бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[0; 1]$. Введем на этом множестве операцию умножения $\circ$ следующим образом:

$$(a \circ b)(x) = a(x) \int_0^x b(t) dt, \text{ где } a(x), b(x) \in C^\infty[0; 1].$$

Тогда $(C^\infty[0; 1], \circ)$ является алгеброй Зинбиеля.

Для алгебр Зинбиеля определим нижний центральный и производный ряд следующим образом:

$$a) A^1 = A, A^{k+1} = A \circ A^k, k \geq 1$$

$$b) A^{[1]} = A, A^{[k+1]} = A^{[k]} \circ A^{[k]}, k \geq 1$$

Определение 2. Алгебра Зинбиеля A называется *нильпотентной*, если существует $s \in \mathbf{N}$ такое, что $A^s = 0$. Минимальное число s , обладающее таким свойством называется *индексом nilпотентности (нильиндексом)* алгебры A , т.е. $A^{s-1} \neq 0$ и $A^s = 0$.

Нетрудно видеть, что индекс nilпотентности произвольной n -мерной nilпотентной алгебре не превосходит числа $n+1$.

Алгебра Зинбиеля A называется *разрешимой*, если существует $m \in \mathbf{N}$ такое, что $A^{[m]} = 0$. Натуральное число m называется *индексом разрешимости* алгебры A , если $A^{[m-1]} \neq 0$ и $A^{[m]} = 0$.

Теорема 1 [4]. Произвольная конечномерная комплексная алгебра Зинбиеля nilпотентна (следовательно, разрешима и нильна). Если $p > 0$, то всякая алгебра Зинбиеля размерности меньше числа $\log_2(p+1)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики p nilпотентна. (следовательно, разрешима и нильна).

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 2. Произвольная двумерная алгебра Зинбиеля над полем характеристики 3 изоморфна следующим не изоморфных алгебр:

$$A_1 : e_2 \circ e_2 = e_1. \quad A_2: \text{Абелева.}$$

Доказательство. Пусть A двумерная алгебра Зинбиеля с базисом $\{e_1, e_2\}$. Пусть $\dim A^2 = 2$. Тогда получим следующее умножение:

$$\begin{aligned} e_1 \circ e_1 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, & e_2 \circ e_1 &= \alpha_5 e_1 + \alpha_6 e_2, \\ e_1 \circ e_2 &= \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2, & e_2 \circ e_2 &= \alpha_7 e_1 + \alpha_8 e_2, \end{aligned}$$

где $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_3$, $i = \overline{1, 8}$.

Проверяя тождество Зинбиеля получим следующие соотношения:

1. $\alpha_2\alpha_5 = 2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1^2$
2. $\alpha_2\alpha_6 = 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2$
3. $\alpha_4\alpha_5 = \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_5 + \alpha_3\alpha_6$
4. $\alpha_4^2 + \alpha_2\alpha_5 = 0$
5. $\alpha_2\alpha_7 = \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_5 + \alpha_3\alpha_6$
6. $\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_8 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_4\alpha_6$
7. $\alpha_3^2 + \alpha_4\alpha_7 = 2\alpha_1\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8$
8. $\alpha_3\alpha_4 = 2\alpha_2\alpha_7 + \alpha_4\alpha_8$
9. $\alpha_5\alpha_6 = 2\alpha_2\alpha_7 + \alpha_1\alpha_5$
10. $\alpha_2\alpha_5 + \alpha_6^2 = 2\alpha_2\alpha_8 + 2\alpha_1\alpha_6$
11. $\alpha_1\alpha_7 + \alpha_5\alpha_8 = \alpha_3\alpha_5 + \alpha_6\alpha_7$
12. $\alpha_2\alpha_7 = \alpha_4\alpha_8 + \alpha_3\alpha_6 + \alpha_5\alpha_6$
13. $\alpha_5^2 + \alpha_4\alpha_7 = 0$
14. $\alpha_4\alpha_5 = \alpha_4\alpha_8 + \alpha_3\alpha_6 + \alpha_5\alpha_6$
15. $\alpha_3\alpha_7 = 2\alpha_5\alpha_7 + \alpha_7\alpha_8$
16. $\alpha_4\alpha_7 = 2\alpha_6\alpha_7 + \alpha_8^2$

Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Пусть $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Тогда из соотношения 1)-16) следует, что

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = 0 \text{ и } e_2 \circ e_2 = \alpha_7 e_1.$$

а) Если $\alpha_7 = 0$, то получим Абелеву алгебру.

б) если $\alpha_7 = 1$, то имеем алгебру A_1 : $e_2 \circ e_2 = e_1$.

Случай 2. Пусть $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. Тогда из 1)-16) вытекает, что

$$\alpha_3 = 0, \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0 \text{ и } e_1 \circ e_1 = e_2.$$

Сделав замену базиса $e_1' = e_2$, $e_2' = e_1$ получим алгебру A_1 .

Случай 3. Пусть $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$. Тогда из 1)-16) вытекает, что

$$\alpha_3 = 0, \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0 \text{ и } e_1 \circ e_1 = 2e_2.$$

Сделав замену базиса $e_1' = e_2$, $e_2' = e_1$ получим алгебру A_1 .

Случай 4. Пусть $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда из 1)-16) вытекает, что

$$\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = 0, \forall (\alpha_2, \alpha_7) \text{ и } \alpha_2\alpha_7 = 0.$$

По этому соотношению можно рассмотреть только один случай $\alpha_2 = \alpha_7 = 0$ и получим Абелеву алгебру.

Случай 5. Пусть $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$. Тогда из равенства 7) следует, что возникает противоречие, значит, такой случай невозможен.

Случай 6. Пусть $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 2$. Если $\alpha_2 = 0$, тогда из равенства 16) получим противоречие значит, такой случай невозможен. Если $\alpha_2 \neq 0$ тогда из равенства 4) получим противоречие отсюда следует, что всегда $\alpha_3 = 0$.

Случай 7. Пусть $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Тогда из равенства 6) получим противоречие значит, такой случай невозможен.

Случай 8. Пусть $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Тогда из равенства 3) получим противоречие значит, такой случай невозможен.

Случай 9. Пусть $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$. Если рассмотрим случаи $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_3 = 1$, тогда из равенства 3) получим противоречие значит, такой случай невозможен. Если рассмотрим случаи $\alpha_3 = 2$. Тогда из 1)-16) вытекает, что

$$\alpha_4 = \alpha_6 = \alpha_8 = 1, \alpha_5 = \alpha_7 = 2$$

и

$$e_1 \circ e_1 = 2e_1 + e_2, \quad e_2 \circ e_1 = 2e_1 + e_2, \quad e_1 \circ e_2 = 2e_1 + e_2, \quad e_2 \circ e_2 = 2e_1 + e_2.$$

В этом умножение сделав замену

$$e_1' = 2e_1 + e_2, \quad e_2' = e_2,$$

получим $e'_1 \circ e'_1 = 9e'_1 = 0$, $e'_2 \circ e'_1 = 3e'_1 = 0$, $e'_1 \circ e'_2 = 3e'_1 = 0$, $e'_2 \circ e'_2 = e'_1$, а это алгебра A_1 .

Случай 10. Пусть $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Если рассмотрим случаи $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_3 = 2$, тогда из равенства 3) получим противоречие значит, такой случай невозможен. Если рассмотрим случаи $\alpha_3 = 1$, тогда из 1)-16) вытекает, что $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 1$, $\alpha_7 = \alpha_8 = 2$ и имеем

$$e_1 \circ e_1 = 2e_1 + 2e_2, \quad e_2 \circ e_1 = e_1 + e_2, \quad e_1 \circ e_2 = e_1 + e_2, \quad e_2 \circ e_2 = 2e_1 + 2e_2.$$

В этом алгебре сделав замену базиса

$$e'_1 = e_1 + e_2, \quad e'_2 = e_2,$$

получим

$$e'_1 \circ e'_1 = 6e'_1 = 0, \quad e'_2 \circ e'_1 = 3e'_1 = 0, \quad e'_1 \circ e'_2 = 3e'_1 = 0, \quad e'_2 \circ e'_2 = 2e'_1,$$

и этот алгебру обозначим A_2 .

Случай 11. Пусть $\alpha_2 = 0$. то получим случай 1.

Случай 12. Пусть $\alpha_2 = 1$. Если $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_1 = 2$ получим случаи 1.2, 2, 3.1.

Теперь проверим на изоморфизм следующие алгебры:

Сначала исследуем изоморфность алгебры A_1 и A_2 . Пусть $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$ изоморфизм, и пусть $\varphi(e_1) = a_1e_1 + a_2e_2$, $\varphi(e_2) = b_1e_1 + b_2e_2$. Проверим умножение алгебры A_2 в новом базисе:

$$1) \quad 0 = \varphi(e_1) \circ \varphi(e_1) = (a_1e_1 + a_2e_2) \circ (a_1e_1 + a_2e_2) = a_2^2e_1. \Rightarrow a_2 = 0.$$

$$2) \quad 0 = \varphi(e_1) \circ \varphi(e_2) = (a_1e_1) \circ (b_1e_1 + b_2e_2) = 0.$$

$$3) \quad \varphi(e_2) \circ \varphi(e_2) = (b_1e_1 + b_2e_2) \circ (b_1e_1 + b_2e_2) = b_2^2e_1.$$

$$\text{С другой стороны } \varphi(e_2) \circ \varphi(e_2) = \varphi(e_1) = a_1e_1. \Rightarrow a_1 = b_2^2.$$

А это означает, что $A_1 \cong A_2$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adashev J.Q., Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. Complex naturally graded quasi-filiform Zinbiel algebras. // Contemporary Mathematics. AMS 2009. Pp. 1-13.
2. Adashev J.Q., Omirov B.A., Khudoyberdiyev A.Kh. Classifications of some classes of Zinbiel algebras. // Journal of Generalized Lie Theory and applications. – 2010. –Vol. 3(4), –P. 1-10.
3. Adashev J.Q., Omirov B.A., Khudoyberdiyev A.Kh. On some nilpotent classes of Zinbiel algebras and their applications. // Third International Conference on Research and Education in Mathematics. –2007. Malaysia. –P. 45-47.
4. Dzhumadil'daev A.S., Tulenbaev K.M. Nilpotency of Zinbiel algebras. // J.Dyn. Control. Syst., – 2005.–Vol. 11(2), –P. 195-213.
5. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. // Enseign. Math. – 1993. - Vol. 39. – P. 269-293.
6. Loday J.-L., Pirashvili T. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology. // Math. Ann. – 1993. - Vol. 296. – P. 139-158.
7. Loday J.-L., A.Frabeti, F.Chapoton, F.Goichot. Dialgebras and Related Operads. // Lecture Notes in Math. –2001. –Vol. 1763. –133 p.
8. Loday J.-L. Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras. // Math. Scand., –1995, –Vol. 77(2), –P. 189-196.
9. Омиров Б.А. Классификация двумерных комплексных алгебр Зинбиеля. // Уз. мат. Журнал. –2002. –№ 2. –С. 55-59.

Резюме. Ушбу мақолада икки ўлчовли Зинбиел алгебралари таснифланган ва 3 характеристика майдони устидаги уч ўлчовли Зинбиел алгебралари таснифланган.

Таянч сўзлар: Зинбиел алгебраси, Лейбнис алгебраси, нильпотент алгебра, чекли ўлчовли алгебралар.

Резюме. В этой статье классифицированы двумерные алгебры Зинбиеля и описаны трехмерные алгебры Зинбиеля над полем характеристики 3.

Ключевые слова: Алгебра Зинбиел, алгебра Лейбница, нильпотентная алгебра, конечномерные алгебры.

Resume. In this paper classifies two-dimensional Zinbiel algebras and describes three-dimensional Zinbiel algebras over a field of characteristic 3.

Key words: Zinbiel algebra, Leibniz algebra, nilpotent algebra, finite-dimensional algebras.